

• Schwarz's lemma: $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 解析

则 $\forall \gamma: [0,1] \rightarrow B(0,1)$ 是 C^1 弧, 有 $l_p(f \circ \gamma) \leq l_p(\gamma)$

$\forall x, y \in B(0,1)$, $d_p(f(x), f(y)) \leq d_p(x, y)$.

• 定义: 称 f 有一个 孤立奇点 (Isolated singularity) a ,

若 $\exists R > 0$, f 在 $B_0(a, R) = B(a, R) \setminus \{a\}$ 上解析. 但在 $B(a, R)$ 不解析.

称 f 的孤立奇点 a 是 可去奇点,

若 $\exists R > 0$, $\exists g: B(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ 解析, 且 $g = f|_{B_0(a, R)}$.

其中 g 称为 f 在 $B(a, R)$ 上 解析延拓

例: $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点

但只是 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点.

• 定理: $z=a$ 是 f 的孤立奇点, 则 a 可去 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$

$\Rightarrow$: $\checkmark$

$\Leftarrow$: $g = (z-a)f$

断言: g 在 $z=a$ 处解析.

若断言成立, $g(a) = 0 \Rightarrow \exists R, \exists h: B(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ 解析,

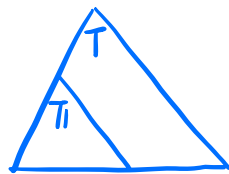
且 $g = (z-a)h(z)$, $z \in B(a, R)$.

$\Rightarrow h = f|_{B_0(a, R)} \Rightarrow a$ 为 f 的可去奇点.

断言的证明: 用 Morera 定理

设 f 在 $B_0(a, R)$ 解析, 下证 g 在 $B(a, R)$ 解析.

$\forall$ 三角形路径 T , 去证: $\int_T g(z) dz = 0$



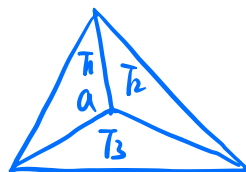
① a 在三角形外部 $\checkmark$

② a 是三角形顶点. $\int_T g dz = \int_{T_1} g dz$, l 为 T 周长.

$g(a) = 0$ 且 g 连续 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists T_1$ 使 T_1 上总有 $|g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{l}$.

$$\Rightarrow \left| \int_{T_1} g dz \right| \leq \int_{T_1} |g| dz \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_T g dz = 0 \quad \checkmark$$



③ a 在三角形内部.

$$\int_T g dz = \int_{T_1} g dz + \int_{T_2} g dz + \int_{T_3} g dz \quad \checkmark$$

• Morera 定理: G 区域, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 若 $\forall G$ 中三角形路径 T , $\int_T f dz = 0$, 则 f 在 G 上解析.

不妨 $G = B(a, R)$, 取 $F(z) = \int_{[a, z]} f(w) dw$, $z \in B(a, R)$.

由条件: $\forall z_0 \in B(a, R)$, $F(z) = \int_{[a, z_0]} f dz + \int_{[z_0, z]} f dz$

$$\Rightarrow \forall z_1 \in B(a, R), \left| \frac{F(z_1) - F(z_0)}{z_1 - z_0} - f(z_0) \right| = \frac{1}{|z_1 - z_0|} \left| \int_{[z_0, z_1]} (f(z) - f(z_0)) dz \right|$$

$$\leq \sup \{ |f(z) - f(z_0)| : z \in [z_0, z_1] \} \xrightarrow{z_1 \rightarrow z_0} 0$$

• 定义: $z=a$ 为 f 的孤立奇点, 若 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, 称 a 是 f 的 极点.
若 a 非极点、非可去, 称 a 是 f 的 本性奇点.

• 命题: G 区域, $f: G \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ 解析, a 是极点.

则 $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists g: G \rightarrow \mathbb{C}$ 解析, $f = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $\forall z \in G \setminus \{a\}$.

a 是 f 的零点 $\Rightarrow f = \frac{h(z)}{(z-a)^n}$, h 在 G 上解析且非零

· 定义: $z=a$ 是 f 的极点.

m 是使 $z=a$ 为 $f(z)(z-a)^m$ 可去奇点的最小自然数.

m 称 $z=a$ 是 f 的 m 阶极点.

· 定义: $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, z_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛,

若 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n, \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ 绝对收敛, 令 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$

对函数级数类似定义.

· 定理: $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty, a \in \mathbb{C}, \text{ann}(a; R_1, R_2) := B(a, R_2) \setminus \overline{B(a, R_1)}$

若 f 在 $\text{ann}(a; R_1, R_2)$ 解析, 则 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ (*),

且级数在 $\overline{\text{ann}(a; r_1, r_2)}$ - 区, 绝对收敛, $\forall R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \gamma: |z-a|=r, r \in (R_1, R_2)$

且 (*) 是唯一 - 的. Laurent series

注意: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \Rightarrow a_n$ 是良定的.

令 $f_2: B(a, r_2) \rightarrow \mathbb{C}, f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw, \gamma_2: |z-a|=r_2,$

则 f_2 在 $B(a, r_2)$ 解析 $\Rightarrow f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$

令 $f_1: \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r_1)} \rightarrow \mathbb{C}, f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw, \gamma_1: |z-a|=r_1$

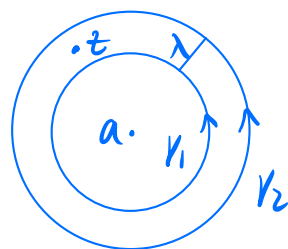
则 f_1 在 $\mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r_1)}$ 解析 (*)

从而对 $z \in \text{ann}(a; R_1, R_2), \exists r_1, r_2, R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2,$

s.t. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = f_2(z) - f_1(z)$

对 (*) 取 $g(z) = f_1(a + \frac{1}{z}), z \in D(0, \frac{1}{r_1})$

下证: $z=0$ 是 g 的一个可去奇点.



$$\because |f_1(z)| \leq \frac{Mr}{d(z, C)}, \text{ 其中 } C: |z-a|=r$$

$$\text{且 } \lim_{r \rightarrow \infty} d(z, C) = \infty$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f_1(a + \frac{1}{z}) = 0$$

从而 $g(z)$ 延拓到 $g(0)=0$, g 在 $D(0, \frac{1}{r})$ 解析

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n z^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \left(\frac{1}{z-a}\right)^n$$

综上, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \left(\frac{1}{z-a}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n \rightarrow$ 正则部分

singular part 主部 且两个级数均一致绝对收敛.

· 推论: $z=a$ 是 f 的孤立奇点.

$a \in (a; 0, R)$ 上 Laurent 级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n$, 则:

(a) 以下等价: (1) A 可去

(2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 存在且 $\in \mathbb{C}$

(3) f 在 $D_0(a, \varepsilon)$ 上有界

(4) $A_n = 0, \forall n \leq -1$.

(b) a 是 m 阶极点 $\Leftrightarrow A_{-m} \neq 0$ 且 $\forall n \leq -(m+1), A_n = 0$

(c) a 是本性奇点 $\Leftrightarrow \exists$ 无限个 $n \leq -1, A_n \neq 0$.

(a): (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3): $\checkmark$

$$(3) \Rightarrow (4): |A_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\varepsilon^{n+1}} ds = M \varepsilon^{-n} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$(4) \Rightarrow (1): g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n \text{ 解析.}$$

(b): $\Leftarrow$: 由(a): $z=a$ 是 $(z-a)^m f(z)$ 的可去奇点. 且这样取 m 最小.

(c): $\checkmark$

• Casorati - Weierstrass 定理:

f 有一个本性奇点 $z=a$, $\forall \delta > 0$, $f(B_\delta(a, \delta))$ 在 $\mathbb{C}$ 稠密.

证: $\exists \delta > 0$, $\exists b \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\delta(a, \delta))}$

$\forall \varepsilon > 0$, $B(b, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\delta(a, \delta))}$

取 $g(z) = \frac{1}{f(z)-b}$, $\forall |g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $z \in B_\delta(a, \delta)$

由推论(a): $z=a$ 是 g 的可去奇点

$\Rightarrow z=a$ 是 $f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$ 的本性奇点或极点. 矛盾!

• Great Picard Thm: f 有一个本性奇点 $z=a$, 在 $B_\delta(a, \delta)$ 上解析,

$\forall \varepsilon \in (0, \delta)$, $\text{card}(\mathbb{C} \setminus f(B_\varepsilon(a, \varepsilon))) \leq 1$.

• 命题: ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点, f 在 ∞ 处 Laurent 展开 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, $\forall$:

(a) ∞ 可去 $\Leftrightarrow a_n = 0, \forall n \geq 1$

(b) ∞ 是极点 $\Leftrightarrow a_1, a_2, \dots$ 中只有有限个非 0.

(c) ∞ 是本性奇点 $\Leftrightarrow a_1, a_2, \dots$ 中无限个非 0.

证: f 整函数 $\Rightarrow f$ 在 $z=0$ 处幂级数展开式 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

即为 f 在 $z=\infty$ 处 Laurent 展开式

• 定理: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 双全纯 $\Leftrightarrow f(z) = az+b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$\Leftarrow$: 显然

$\Rightarrow$: f 整函数, ∞ 为 f 的本性奇点.

若 ∞ 可去 $\Rightarrow f$ 有界 $\Rightarrow f \equiv c$, 矛盾!

若 ∞ 为极点 $\Rightarrow$ 由 Weierstrass: 矛盾!

若 ∞ 为极点 $\Rightarrow f = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$

由代数基本定理: $n=1 \Rightarrow f = az+b$.

• 亚纯函数 Meromorphic functions

定义: 区域 $U \subseteq \mathbb{C}$, $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 在非极点处处处解析, 称 f 为 亚纯函数.

注: 解析函数为亚纯函数.

亚纯 $\Leftrightarrow \mathbb{C}$ 到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的不恒为 ∞ 的解析映射.

• 引理: 区域 $U \subseteq \mathbb{C}$, $f, g: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 亚纯.

则 $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ (若 $g \neq 0$) 也亚纯. $\Rightarrow$ 亚纯函数构成一个域.

• 定理: 区域 $U \subseteq \mathbb{C}$, $f, g: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 亚纯.

若 $f(z_n) = g(z_n), \forall n$, 且 $\{z_n\}$ 在 U 内有聚点, 则 $f \equiv g$. 证明略.

注: (i) $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 亚纯, K 紧集 $K \subseteq U$, K 中至多有限个极点

(ii) $f, g: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 亚纯, 若 $\forall$ 极点 $z=a$,

Laurent 级数 $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$

满足 $a_n = b_n, \forall n \leq -1$. 则 $f-g: U \rightarrow \mathbb{C}$ 解析

• Mittag-Leffler 定理: $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ 互不相同, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

$\forall z_n$, 给定 $m_n \in \mathbb{N}$ 及 $L_n(z) = \frac{a_{n,1}}{z-z_n} + \frac{a_{n,2}}{(z-z_n)^2} + \dots + \frac{a_{n,m_n}}{(z-z_n)^{m_n}}$

则 $\exists$ 亚纯函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, 其极点恰为 $\{z_n\}$.

且 f 在 z_n 的 Laurent 展式的主部为 $L_n(z)$, $\forall n$ 证明较难, 略

· 定理: $\hat{\mathbb{C}}$ 上亚纯函数均为有理函数 $\frac{Q(z)}{P(z)}$, P, Q 为多项式.

$\hat{\mathbb{C}}$ 紧 $\Rightarrow$ 不妨 $z_1, \dots, z_l, \infty$ 为全体极点.

$$\text{设 } L_k(z) = \frac{a_{k,1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2} + \dots + \frac{a_{k,m_k}}{(z-z_k)^{m_k}}, \quad k=1, 2, \dots, l$$

$L_0(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{m_0} z^{m_0}$ 为对应 Laurent 级数主部.

则: $f - L_1 - L_2 - \dots - L_l - L_0$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上解析

$\Rightarrow f - L_1 - L_2 - \dots - L_l - L_0 \equiv C \Rightarrow f$ 为有理函数

· 推论: $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 双全纯 $\Leftrightarrow f$ 是 Möbius 变换.

$\Leftarrow$: 显然

$\Rightarrow$: f 为 $\hat{\mathbb{C}}$ 上亚纯函数 $\Rightarrow f = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P, Q 为多项式

若 $\deg P \geq 2$ 或 $\deg Q \geq 2$, 则 f 非双射.

故 $f = \frac{az+b}{cz+d}$, 易见 $ad \neq bc$

· Cousin Question 2:

定理: $z_n \in \mathbb{C}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$, (m_n) 为正整数列.

则: $\exists f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 解析, f 零点恰为 $\{z_n\}$, 且 z_n 为 m_n 阶零点.

证明见参考文献.

· 推论: $g: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 亚纯, 则: $\exists f, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 解析, $g(z) = \frac{f(z)}{h(z)}$

设 g 的极点为 $\{z_n\}$, z_n 为 m_n 阶极点.

$\Rightarrow \exists \mathbb{C}$ 上解析函数 h , 零点为 $\{z_n\}$, z_n 为 m_n 阶零点.

⇒ $f = gh$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析

• 留数 Residues

定义: $z=a$ 是 f 的孤立奇点, Laurent 展开 $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$,

则 f 在 $z=a$ 处留数为 a_{-1} , 记为 $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$

证: $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz$, $\forall$ 充分小的 $\varepsilon > 0$.

$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz$, R 充分大.

• 留数定理: 区域 $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, $\{a_1, \dots, a_m\}$ 为 f 的孤立奇点, f 在 $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ 上解析,

$\gamma_1, \dots, \gamma_l$ 为 Ω 中不经过 $a_1, \dots, a_m$ 的闭曲线,

且 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\sum_{j=1}^l n(\gamma_j; z) = 0$.

则: $\sum_{j=1}^l \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f dz = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^l n(\gamma_j; a_k) \right) \text{Res}(f, a_k)$

Case 1: ∞ 不是奇点

取 $\tilde{\gamma}_k(z) = a_k + r_k e^{-2\pi i t \sum_{j=1}^l n(\gamma_j, a_k)}$, r_k 充分小

易验证: $\sum_{j=1}^l n(\gamma_j, z) + \sum_{k=1}^m n(\tilde{\gamma}_k, z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \cup \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

由 Cauchy 定理: $\sum_{j=1}^l \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f dz = -\sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_k} f dz$

而: $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_k} f dz = \sum_{j=1}^l n(\gamma_j, a_k) \text{Res}(f, a_k)$ ✓

Case 2: ∞ 是奇点. 类似可证.

• 推论: ($\Omega = \hat{\mathbb{C}}$) $f: \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ 解析,

则: $\sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0$

取 R 充分大, 使 $z_1, \dots, z_n$ 全在 $V: |z|=R$ 内部 ✓

命题: $z=a$ 是 f 的 m 阶极点, $g(z) = (z-a)^m f(z)$.

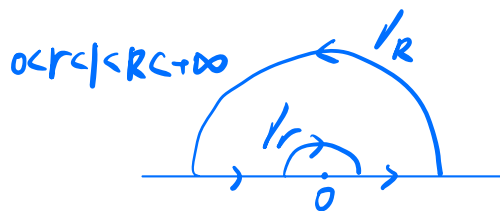
证: $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$

证 $f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k} (z-a)^k$

$\Rightarrow g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-a)^k$, 代入易得 $\checkmark$

例: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

$z=0$ 是 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ 的一阶极点.



Cauchy 定理 $\Rightarrow 0 = \int_{\Gamma} f(z) dz$

$= \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_R^r \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz$

即 $\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$

$|\int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_r^R \frac{1}{z} dz| \leq \int_r^R |\frac{e^{iz}-1}{z}| dz \leq M\pi r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$

$\nearrow z=0$ 是 $\frac{e^{iz}-1}{z}$ 的可去奇点

$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{1}{z} dz = -\pi i$

$|\int_R^r \frac{e^{iz}}{z} dz| = |\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}} d\theta| \leq \int_0^\pi |e^{iRe^{i\theta}}| d\theta$

$= \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta$

$\leq 2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \right)$

$\leq 2 \left(\frac{\pi}{2} e^{-R \sin \frac{\pi}{2}} + \varepsilon \right)$

$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^r \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. 代入即得.

辐角原理 The Argument Principle:

f 是开集 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上亚纯函数, 极点 $p_1, \dots, p_m$, 零点 $z_1, \dots, z_n$ (记重数)

γ 为 G 中闭曲线, 不过极点或零点, $n(\gamma, z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$

证: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) - \sum_{k=1}^m n(\gamma, p_k)$

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^m \frac{(z-p_k)}{(z-z_k)} \quad \text{解析且非零}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{z-z_k} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z-p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

用 Cauchy 定理即得.

NTW 理解: $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int d \ln(f(z))$

若沿 1 走一圈, $\text{Arg}(f(z))$ 取增量?

• Rouché's Thm: 解 z_f, p_f 时可找辅助函数 g

$D \subset \mathbb{C}$ 为有界区域, $\partial D = \Gamma$ 是 Jordan 曲线.

f, g 为 D 上亚纯函数, 在 Γ 上无零点或极点

z_f, z_g 为 f, g 在 D 中零点个数 (记重数),

p_f, p_g 为 f, g 在 D 中极点个数 (记重数),

若 $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, z \in \Gamma$, 则: $z_f - p_f = z_g - p_g$

$|\frac{f}{g} + 1| < |\frac{f}{g}| + 1, z \in \Gamma \Rightarrow \frac{f}{g} \notin [0, +\infty), z \in \Gamma$.

取 $\log(z)$ 为 $\ln z$ 的一个单值解析分支.

$\Rightarrow \log(\frac{f}{g})$ 在 Γ 的某邻域上解析

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\frac{f}{g})'}{\frac{f}{g}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}) dz = (z_f - p_f) - (z_g - p_g)$$

• 推论 1: f, g 在 D 上解析, $|g| < |f|, z \in \Gamma$, 则 $z_f = z_{f+g}$
 对 $f+g, -f$ 用 Rouché.

• 推论 2: f, g 在 D 上解析, $|f-g| < |f|, z \in \Gamma$, 则 $z_f = z_g$
 对 $f, -g$ 用 Rouché.

· 推论3: f 在 $\mathcal{U}$ 上解析, $z_0 \in \mathcal{U}_0$ 为 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点,

则: $\exists \rho > 0, \delta > 0$, s.t. $\forall w \in B(w_0, \rho)$,

$f(z) - w$ 在 $B(z_0, \delta)$ 恰有 m 个一阶零点 (无其他零点)

$\exists \delta > 0$, s.t. $B(z_0, 2\delta) \subseteq \mathcal{U}_0$

且 $f(z) - w_0$ 和 $f'(z)$ 在 $B_0(z_0, 2\delta)$ 中无零点.

取 $\rho = \inf \{|f(z) - w_0| : z \in \partial B_0(z_0, \delta)\} > 0$

则: $|f(z) - w - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \rho \leq |f(z) - w_0|$

由 Rouché: $z f(z) - w = z f(z) - w_0 = m$.

而 $f'(z) \neq 0, z \in B(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) - w$ 的零点均为一阶的.

· 推论4: (Open Mapping Thm) $\mathcal{U}$ 区域, $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ 非常值解析. 则 f 为开映射.

$\forall a \in G, w_b = f(a), \exists \rho > 0, \delta > 0$,

s.t. $B(a, \delta) \subseteq \mathcal{U}$ 且 $f(B(a, \delta)) \supseteq B(b, \rho)$ ✓

· 定理: G 开, f 在 G 上解析, 极点 $p_1, \dots, p_m$, 零点 $z_1, \dots, z_n$ (计重数).

$\gamma \subseteq G$ 为可求长闭曲线, 不经过极点、零点, $n(\gamma, z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$.

g 在 G 上解析, 则: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n g(z_i) n(\gamma, z_i) - \sum_{j=1}^m g(p_j) n(\gamma, p_j)$

z_j 为 m_j 阶零点, $f = (z - z_j)^{m_j} h$, h 在 z_j 某邻域解析且非0

$$\Rightarrow g \frac{f'}{f} = g \frac{m_j}{z - z_j} + g \frac{h'}{h}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(g \frac{f'}{f}, z_j) = m_j g(z_j).$$

p_j 为 m_j 阶极点, $f = (z - p_j)^{-m_j} h$, h 在 p_j 某邻域解析且非0

$$\Rightarrow g \frac{f'}{f} = g \frac{m_j}{z - p_j} + g \frac{h'}{h}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(g \frac{f'}{f}, p_j\right) = -m_j g(p_j)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{i=1}^n h(p_i, z_i) \operatorname{Res}\left(g \frac{f'}{f}, z_i\right) - \sum_{j=1}^m h(p_j, p_j) \operatorname{Res}\left(g \frac{f'}{f}, p_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n g(z_i) h(p_i, z_i) - \sum_{j=1}^m g(p_j) h(p_j, p_j) \end{aligned}$$

· 解析开拓 Analytic continuation

定义: $D \subseteq \mathbb{C}$ 为区域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 解析.

$\exists$ 区域 $U \nsubseteq D$, $\exists F: U \rightarrow \mathbb{C}$ 解析且 $f|_U = F|_U$, $z \in D$.

则称 F 是 f 的一个 解析开拓, f 可解析开拓到 U .

例: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, 收敛半径 $r > 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $z \in B(0, 1)$, $\frac{1}{1-z}$ 为其在 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上解析开拓.

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, $\operatorname{Re} z > 1$, 可延拓到 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, $z=1$ 为极点.

定义: $D \subseteq \mathbb{C}$ 为区域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 解析.

若 f 不可解析开拓到 $U \nsubseteq D$, 称 ∂D 为 f 的 自然边界.

D 为 f 的 自然定义域, f 为 D 上的 完全解析函数.

定理: $D \subseteq \mathbb{C}$ 为区域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 解析.

1. ∂D 为 f 的自然边界.

$\Leftrightarrow \forall z_0 \in D$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ 收敛半径 $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$

$\Rightarrow \forall z_0 \in D$, $r_0 \triangleq \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, f 在 $B(z_0, r_0)$ 解析. $\Rightarrow R \geq r_0$.

若 $R > r_0$, 则可延拓 $\Rightarrow R = r_0$

←: 若 ∂D 有自然边界, 则 $\exists$ 区域 $\Omega \supset D$, f 可解析延拓到 Ω

$\Rightarrow \exists z_0 \in \partial D$, $\exists r_1 > 0$ 使 $B(z_0, r_1) \subseteq \Omega$.

取 $z_0 \in D \cap B(z_0, r_1)$, $\exists r < r_1$ 使 $z_0 \in B(z_0, r) \subseteq D(z_0, r)$.

$\Rightarrow z_0$ 处泰勒级数收敛半径 $R > r > \text{dist}(z_0, \partial D)$. 矛盾.

· 定义: 区域 D , $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 解析. $w \in \partial D$.

称 w 为 f 的正则点, 若 $\exists r > 0$, $\exists g: B(w, r) \rightarrow \mathbb{C}$ 解析,

且 $f(z) = g(z)$, $\forall z \in B(w, r) \cap D$, 其中 g 为 w 处泰勒级数.

若 w 非正则点, 称其为奇异点.

注: w 为 f 的正则点, 则 g 为 f 的直接开拓.

· 定理: $f(z) = \sum a_n z^n$, 收敛半径 $R > 0$. 则 $\exists w \in \partial B(0, R)$ 为 f 的奇异点.

反设: $\forall w \in \partial B(0, R)$, $\exists r_w > 0$, f 有直接开拓 $g_w: B(w, r_w) \rightarrow \mathbb{C}$

由紧性: $\exists$ 有限覆盖 $\bigcup_{j=1}^N B(w_j, r_{w_j}) \supseteq \partial B(0, R)$.

定义 $F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ g_{w_j}(z), & z \in B(w_j, r_{w_j}) \end{cases}$

若 $B(w_j, r_{w_j}) \cap B(w_k, r_{w_k}) \neq \emptyset$,

则 $\forall z \in B(w_j, r_{w_j}) \cap B(w_k, r_{w_k}) \cap D$, $g_{w_j}(z) = f(z) = g_{w_k}(z)$

由唯一性定理: $g_{w_j}(z) = g_{w_k}(z)$, $\forall z \in B(w_j, r_{w_j}) \cap B(w_k, r_{w_k})$

· 例: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 有自然边界 $\partial B(0, 1)$.

证: 考虑 $E = \{e^{\frac{2\pi i p}{q}} : p, q \in \mathbb{N}, \text{cpq} = 1\}$, 则 $\bar{E} = \partial B(0, 1)$.

奇异点集为闭集 $\Rightarrow$ 只需证: E 中点均为奇异点.

$$\text{而 } r < 1 \text{ 时, } \text{fire}^{\frac{2\pi i p}{q}} = \sum_{k=1}^{q-1} r^k e^{\frac{2\pi i p k}{q}} + \sum_{k=q}^{\infty} r^k e^{\frac{2\pi i p k}{q}}$$

$$\forall M \in \mathbb{N}, M \geq q, |\text{fire}^{\frac{2\pi i p}{q}}| \geq -q+1 + \sum_{k=q}^M r^k \xrightarrow{r \rightarrow 1} M - 2(q-1)$$

故 $\lim_{r \rightarrow 1} |\text{fire}^{\frac{2\pi i p}{q}}| = +\infty \Rightarrow e^{\frac{2\pi i p}{q}}$ 为 f 的奇异点.

· 沿曲线解析开拓

定义: (f, G) 称为 解析元素, 若 G 是一个区域, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 解析.

$(f, D_0), (g, D_1)$ 称为 直接延拓.

若 $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ 且 $f(z) = g(z), \forall z \in D_0 \cap D_1$, 记为 $(f, D_0) \sim (g, D_1)$

链 $b = (D_0, D_1, \dots, D_n), D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$.

解析元素 (f_i, D_i) 满足 $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$.

则称 (f_n, D_n) 是 (f_0, D_0) 沿 b 的 解析开拓

注: 上述 f_n 由 b 唯一确定.

· 定义: 链 $b = (D_0, D_1, \dots, D_n)$ 覆盖路径 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 若:

(i) $\gamma(0)$ 是 D_0 圆心

(ii) $\gamma(1)$ 是 D_n 圆心

(iii) $\exists 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$, s.t. $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq D_i, i=0, 1, \dots, n-1$

若 (f_n, D_n) 是 (f_0, D_0) 沿 b 的 解析开拓 且 b 覆盖 γ ,

称 (f_n, D_n) 是 (f_0, D_0) 沿 γ 的 解析开拓

· 单值性定理: D 单连通区域, $\Delta = B(a, r) \subseteq D, (f(z), \Delta)$ 解析元素

若 (f, Δ) 可沿 D 内 a 出发取 V 解析开拓

则 $\exists$ 解析函数 $F: D \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = f(z)$, $z \in \Delta$.

解析开拓只与 V 起止、终点有关 与 V 的选取无关.

Case 1: $D = B(0, 1)$, $\Delta = B(0, r)$, $r \in (0, 1)$.

例 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R \geq r$.

若 $R < 1$, $\exists z_0 \in \partial B(0, R)$ 为 f 的奇点

$\Rightarrow$ 沿 $\overrightarrow{0z_0}$ 的解析开拓 矛盾! $\Rightarrow F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 即可.

Case 2: $D = \mathbb{C}$, $\Delta = B(0, r)$, $r \in (0, +\infty)$.

例 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R \geq r$.

若 $R < +\infty$, $\exists z_0 \in \partial B(0, R)$ 为 f 的奇点

$\Rightarrow$ 沿 $\overrightarrow{0z_0}$ 的解析开拓 矛盾! $\Rightarrow F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 即可.

Case 3: $\forall D$ 单连通, $D \neq \mathbb{C}$, 由 Riemann 映射定理:

$\exists$ 单值解析函数 $g: D \rightarrow B(0, 1)$, s.t. $g(a) = 0$,

OMT $\Rightarrow g$ 双全纯

$g(B(a, r))$ 可, $(f \circ g^{-1}, g(\Delta))$ 可延 $g^{-1}(1)$ 解析开拓.

由 Case 1: $\exists F: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = f \circ g^{-1}(z)$, $z \in g(\Delta)$

$\Rightarrow F \circ g$ 为 f 的解析开拓.

• Schwarz Reflection Principle

$$\mathcal{N}_+ = \mathcal{N} \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cap \{z: \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$\mathcal{N}_- = \mathcal{N} \cap \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$$

$$\mathcal{N}_\Psi = \{\bar{z} : z \in \mathcal{N}\}$$

定理: Ω 域 $\mathcal{N}$ 满足 $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$.

$f: \mathcal{N} \cup \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ 在 $\mathcal{N}$ 上解析, 在 $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}_0$ 上连续.

若 $f(\mathcal{N}_0) \subseteq \mathbb{R}$, 则 f 可延拓到 $\mathcal{N}$,

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}_0 \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \mathcal{N}^- \end{cases}$$

(1) F 在 $\mathcal{N}^-$ 解析.

$$\forall z_0 \in \mathcal{N}^-, \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right)} = \overline{f'(\bar{z}_0)}$$

(2) $z = x \in \mathbb{R}$ 处连续.

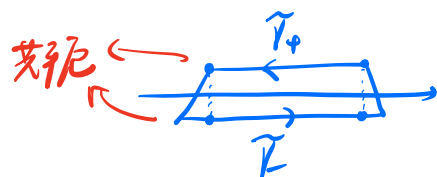
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall z \in B(x, \delta) \cap (\mathcal{N} \cup \mathcal{N}_0), |R(f(z)) - f(x)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall z \in B(x, \delta) \cap \mathcal{N}^-, |R(f(z)) - f(x)| = |R(\overline{f(\bar{z})}) - f(x)| < \varepsilon$$

虚部同样处理 $\Rightarrow F \in C(\mathcal{N})$.

(3) F 解析.

用 Morera: 只需证 $\int_\gamma F dz = 0$, γ 如图.



$$\begin{aligned} \text{即 } \left| \int_{\gamma_+} F dz + \int_{\gamma_-} F dz \right| &\leq \left| \int_{\gamma_+} R F dz + \int_{\gamma_-} R F dz \right| + \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} |Im F| dz \\ &= \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} |Im F| dz \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$D = B(a, r), \mathcal{N} \text{ 区域, } \mathcal{N} \cap D = \mathcal{N} \cup D$$

$$\mathcal{N}_D^c = \mathcal{N} \cup D^c$$

$$\mathcal{N} \cap D = \mathcal{N} \cup \partial D.$$

$$\mathcal{N}_D^* = \{z^*: z^* \text{ 与 } z \in \mathcal{N} \text{ 关于 } \partial D \text{ 对称.}\}$$

$$|z - a| \cdot |z^* - a| = r^2$$

• 定理: $D = B(a, r)$, $D' = B(b, R)$, 区域 Ω 满足 $\Omega = \Omega_D^*$

$f: \Omega_D \cup \Omega_{\partial D} \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 在 Ω_D 上解析, $f(\Omega_{\partial D}) \subseteq \partial D'$

若 $b \notin f(\Omega_D)$, 则 f 可解析开拓到 Ω ,

若 $b \in f(\Omega_D)$, 则 f 可亚纯开拓到 Ω

对应前一版本中 ψ , φ 为 Möbius 变换, s.t. $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \partial D$, $\psi(\partial D') = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$F = \psi \circ f \circ \varphi: \varphi^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \quad \checkmark$$

• Riemann Mapping Thm

Recall: (1) Thm: Ω 区域, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 单值解析, 则 $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$

反之, 若 $f'(z_0) \neq 0$, 则 $\exists \rho > 0$, $f|_{D(z_0, \rho)}$ 单值解析

(2) Thm: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 单连通区域, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 单值解析,

则 $f(\Omega)$ 单连通

(3) Jordan Curve Thm:

$\gamma \subseteq \mathbb{C}$ 为简单闭曲线, 则 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 有 2 个连通分支,

其中一个有界, 一个无界, 且均有 γ 为边界. 记为 $\text{int}(\gamma)$, $\text{ext}(\gamma)$.

若 γ 可求长, 则 $|n(\gamma; a)| \geq 1, \forall a \in \text{int}(\gamma)$,

$$n(\gamma; a) = 0, \forall a \in \text{ext}(\gamma).$$

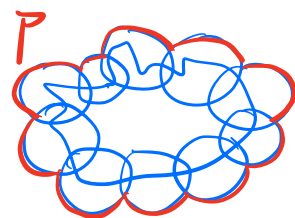
附 of (3): $\forall$ Jordan curve $\gamma \subseteq f(\Omega) \cong G$,

由紧性: $\exists \gamma$ 的有限覆盖取 Γ 如图.

则 $\text{int}(\gamma) \subseteq \text{int}(\Gamma)$, Γ 分段光滑.

只需证: $\text{int}(\Gamma) \subseteq G$.

$f^{-1}(\Gamma) \cong \Gamma' \subseteq \Omega$, Γ' 为分段光滑 Jordan curve.



几乎处处 $\Rightarrow m_s(\Gamma') \subseteq \mathbb{R}$.

下证 $f(m_s(\Gamma')) \geq m_s(\Gamma)$.

$\forall w_0 \in m_s(\Gamma)$, $f(z) - w_0$ 在 $m_s(\Gamma')$ 中变全个数 N .

$$\begin{aligned} \text{由幅角定理: } N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - w_0} \\ &= \pm m[\Gamma, w_0] = \pm 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

· 引理: $G \subseteq \mathbb{C}$ 开, 则 $\exists$ 紧集 $[K_n]_{n \in \mathbb{N}}$, s.t.

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$

(2) $K_n \subseteq \text{int } K_{n+1}$.

(3) $\forall K \subseteq G$ 紧, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $K \subseteq K_{n_0}$.

(4) $\forall \mathbb{C} \setminus K_n$ 取连通分支, 包含一个 $\mathbb{C} \setminus G$ 取连通分支

证: $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\} \cap \{z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{n}\}$

· 定义: 对完备度量空间 (X, d) , 对 $f, g \in C(G, X)$,

$$\rho_n(f, g) = \sup \{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{\rho_n(f, g) + 1} \in \mathbb{R}.$$

· 命题: $(C(G, X), \rho)$ 是完备度量空间, 其拓扑与 $[K_n]$ 取选取无关.

· 命题: $(C(G, X), \rho)$ 中 $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \{f_n\}$ 内闭一致收敛到 f .

· 定义: $F \subseteq C(G, X)$ 正规, 若对 $\forall \{f_n\} \subseteq F$, $\exists$ 子列 $\{f_{n_k}\}$ 内闭一致收敛

· 命题: $F \subseteq C(G, X)$ 正规 $\Leftrightarrow \overline{F}$ 在 $C(G, X)$ 中紧.

· 定义: $F \subseteq C(G, X)$ 在 $z \in G$ 上 等度连续.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in F, \forall z \in B(z_0, \delta),$ 有 $d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$

$F \subseteq C(G, X)$ 在 $E \subseteq G$ 上 等度连续.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in F, \forall z, z'$ 使 $|z - z'| < \delta,$ 有 $d(f(z), f(z')) < \varepsilon$

· 命题: $F \subseteq C(G, X)$ 在 G 上每点处均等度连续,

则 F 内闭等度连续 pf: Lebesgue's Covering Lemma

· Arzelà-Ascoli Thm: $F \subseteq C(G, X)$ 正规 $\Leftrightarrow$ 以下成立:

(a) $\forall z \in G, \{f(z) : f \in F\}$ 紧 一致有界

(b) F 在 G 上每点处均等度连续

· $G \subseteq \mathbb{C}$ 开, 记 $H(G) = \{f \in C(G, \mathbb{C}) : f \text{ 解析}\}$

$A(G) = \{f \in H(G) : f \text{ 有到 } \bar{G} \text{ 有界开集}\}.$

· 定义: $F \subseteq H(G)$ 局部有界.

若 $\forall a \in G, \exists M > 0, r > 0, \forall f \in F, \forall z \in G \cap B(a, r), |f(z)| \leq M.$

· 引理: $F \subseteq H(G)$ 局部有界 $\Leftrightarrow \forall$ 紧集 $K \subset G, F$ 在 K 上一致有界.

· 定理 (Montel): $F \subseteq H(G)$ 内闭一致有界 $\Leftrightarrow F$ 局部有界.

$\Leftarrow$ (Wn-Tan) F 局部有界. 用 A-A 定理.

A-A 条件 (a): $\checkmark$

条件 (b): 取定 $a \in G, \varepsilon > 0.$

则 $\exists r > 0, \exists M > 0$ s.t. $\bar{B}(a, r) \subseteq G.$

且 $\forall f \in F, \forall z \in B(a, r), |f(z)| \leq M.$

对 $z \in B(a, \frac{r}{2})$,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(a, \frac{r}{2})} \frac{f(w)}{w-a} dw - \int_{\partial B(a, \frac{r}{2})} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(a, \frac{r}{2})} \frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r}{2} \cdot \frac{M|a-z|}{r \times \frac{r}{2}} = \frac{2M|a-z|}{r} \end{aligned}$$

取 $\delta = \min\{\frac{r}{2}, \frac{r}{2M}\}$, 对 $\forall z \in B(a, \delta)$, $\forall f \in F$, $|f(a) - f(z)| < \varepsilon$

$\Rightarrow F \subseteq H(G)$ 正规, 若局部有界:

$\exists K \subseteq G$ 紧, $\exists \{f_n\}$, s.t. $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n, \forall n$.

但 $\exists$ 列 $\{f_{n_k}\}$ 内闭一致收敛. $\nexists f_n$.

定理: $\{f_n\} \subseteq H(G)$ 在 G 上内闭一致收敛, $f_n \rightarrow f$, 且 $f \in C(G, \mathbb{C})$,

且 $f \in H(G)$ 且 $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}, \forall k$.

$$\Delta \text{ 紧} \Rightarrow \int_{\Delta} f_n dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} f_n dz = 0$$

由 Morera: $f \in H(G)$

Hurwitz's Thm: 区域 $G \subseteq \mathbb{C}$, $\{f_n\} \subseteq H(G)$, $f_n \rightarrow f$, $f \in C(G, \mathbb{C})$.

若 $f \neq 0$, $\bar{B}(a, R) \subseteq G$, 且 $f(z) \neq 0, |z-a|=R$.

则 $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, f, f_n 在 $\bar{B}(a, R)$ 有相同零点个数.

用 Rouché: 取 $\delta = \inf\{|f(z)| : z \in \partial B(a, R)\} > 0$.

$\bar{B}(a, R)$ 上一致收敛 $\Rightarrow \exists N$, $\forall n > N$, $\forall z \in \bar{B}(a, R)$, $|f(z) - f_n(z)| < \frac{\delta}{2} < |f(z)|$.

推论: 区域 $G \subseteq \mathbb{C}$, $\{f_n\} \subseteq H(G)$, $f_n \rightarrow f$, $f \in C(G, \mathbb{C})$.

$f_n \neq 0, z \in G$, 则 $f \equiv 0$ 或 $f \neq 0, z \in G$

Riemann Mapping Thm: $G \subset \mathbb{C}$ 为单连通区域. $a \in G$,

黎曼映射.

共形映射 3个实自由度

则 $\exists!$ 共形同胚 $f: G \rightarrow B(0,1)$, s.t. $f(a)=0, f'(a)>0$

唯一性: 若 f, g 均满足. 取 $h = f \circ g^{-1}: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$,

则 $h(0)=0, h \circ h^{-1} = \text{id} = h^{-1} \circ h, 1 = h'(0)(h^{-1})'(0)$.

由 Schwarz 引理: $|h'(0)| \leq 1, |(h^{-1})'(0)| \leq 1$

$\Rightarrow |h'(0)| = |(h^{-1})'(0)| = 1$

$\Rightarrow h(z) = cz, c \in \mathbb{C}, |c|=1$.

$\Rightarrow f(z) = c g(z)$

$\Rightarrow f'(z) = c g'(z) \Rightarrow c=1$

存在性: $\mathcal{F} = \{f \in H(G) \mid f: G \rightarrow B(0,1) \text{ 单值解析}, f(a)=0, f'(a)>0\}$.

$\mathcal{F}$ 有界 $\Rightarrow$ 由 Montel: $\mathcal{F}$ 内闭一致有界.

Claim 1: $\mathcal{F} \neq \emptyset$

Claim 2: $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$ ($\bar{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 在 $C(G, \mathbb{C})$ 中闭包).

若 Claim 均成立, 考虑 $D: H(G) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f'(a)$. 则 D 连续.

$\Rightarrow \exists f \in \bar{\mathcal{F}}$, 使 $|Df|$ 无界. 取列 f_n

由 Claim 1 和 2: $f \in \mathcal{F}$.

只需证: $f(G) = B(0,1)$.

反证: 若 $\exists w \in B(0,1) \setminus f(G)$. 则 $h(z) = \frac{f(z)-w}{1-\bar{w}f(z)} \in H(G), h \neq 0$.

G 单连通 $\Rightarrow \exists h \in H(G), h_2(z) = (h(z))^2, z \in G$

构造: $\varphi_w(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ 为 $B(0,1)$ 到 $B(0,1)$ 的共形同胚.

取 $g(z) \in H(G), g(z) = \frac{h'(a)}{h'(a)} \cdot \frac{h(z)-h(a)}{1-\bar{h(a)}h(z)}$, 则 $g(G) \subset B(0,1)$.

且 $g(a)=0, g$ 单值解析,

$$g'(a) = \frac{|h'(a)|}{h(a)} \cdot \frac{h'(a)}{1-|h(a)|^2} = \frac{|h'(a)|}{1-|h(a)|^2} > 0 \quad \text{从而 } g \in \mathcal{F}$$

$$\text{证 } 2h(a)h'(a) = f(a) \cdot (1-|w|^2), \quad |h(a)|^2 = |w|.$$

$$\Rightarrow g'(a) = \frac{f'(a)(1-|w|^2)}{2\sqrt{|w|}} \cdot \frac{1}{1-|w|} = f'(a) \cdot \frac{1+|w|}{2\sqrt{|w|}} > f'(a)$$

与 f 的选取矛盾. $\checkmark$

证 of Claim 1: 取 $b \notin G$, G 单连通 $\Rightarrow \exists g, g^2(z) = z - b$.

$$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in G, \text{ 若 } g(z_1) = \pm g(z_2), \text{ 则 } z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow \forall a \in G, -g(a) \notin g(G)$$

$$\Rightarrow \exists r > 0, \quad B(-g(a), r) \cap g(G) = \emptyset.$$

取 Möbius transformation T 将 $\partial B(-g(a), r)$ 映为 $\partial B(0, 1)$, $g(a)$ 映为 0

$$\text{取 } \theta = -\arg(R \circ g)'(z_0), \text{ 则 } h(z) = e^{i\theta} T \circ g(z) \in \mathcal{F}$$

证 of Claim 2: $f_n \rightarrow f, f_n \in \mathcal{F}, f \in C(G, \mathbb{C}),$ 则 $f \in H(G), f(a) = 0, f'(a) > 0$.

下证: $f \equiv 0$ 或 f 单值解析.

$$\text{证取 } z_0 \in G, \quad \forall z_1 \in G \setminus \{z_0\}.$$

$$\exists r > 0, \text{ s.t. } z_0 \in G \setminus \bar{B}(z_1, r), \quad \bar{B}(z_1, r) \subseteq G$$

$$\text{则: } f_n(z_1) - f_n(z_0) \rightarrow f(z_1) - f(z_0)$$

$$\text{由 Hurwitz: } f(z) \equiv f(z_0) \text{ 或 } f(z) \neq f(z_0), \quad z \in B(z_1, r).$$

$$\text{由 } z_0, z_1 \text{ 的任意性: } f(z) \equiv f(a) = 0 \text{ 或 } f(z_1) \neq f(z_0), \quad \forall z_1, z_0$$

· 边界对应原理:

定理: 若在 RMT 中, ∂G 为 Jordan curve, 则 f 可开拓为 $g \in C(\bar{G}, \bar{B}(0, 1))$.

可用于解决 Dirichlet 问题!

· 调和函数 & Dirichlet 问题.

定义: $P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in \mathbb{R}$, 称为 泊松核.

引理: $\operatorname{Re} \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) = P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z=re^{i\theta}, \quad \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = (1+z)(1+z+z^2+\dots)$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = P_r(\theta)$$

命题: (1) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$

(2) $P_r(\theta) > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(3) $P_r(\theta) < P_r(\delta)$, 若 $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$

(4) $\forall \delta \in (0, \pi)$, $\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\theta) = 0$, $\theta \in [\delta, \pi] \cup [-\pi, -\delta]$ - 收敛.

Dirichlet 问题: 哪个区域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 满足: $\forall f \in C(\partial G, \mathbb{R})$,

$\exists u \in C(\bar{G}, \mathbb{R})$, $u|_{\partial G} = f$ 且 u 为 G 上调和函数?

这样的 G 称为 Dirichlet 区域

Thm: $B(0, 1)$ 为 Dirichlet 区域

且 u 为 $\bar{B}(0, 1)$ 上调和: $u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(e^{it}) dt$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\text{取 } u(re^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(e^{it}) dt, & r \in [0, 1] \\ f(e^{i\theta}), & r=1 \end{cases}$$

(1) u 在 $z=re^{i\theta} \in B(0, 1)$ 上调和.

$$\begin{aligned} u(z) = u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} f(e^{it}) dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(e^{it}) dt \right] \end{aligned}$$

* Leibniz 法则: γ 可求长曲线, $V \subseteq G \subseteq \mathbb{C}$, $\varphi \in C(V \times G, \mathbb{C})$.

$$g(z) = \int \gamma(w, z) dw, \text{ 则 } g \in C(G, \mathbb{C}).$$

$$\text{若 } \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{z}} \in C(Y \times G, \mathbb{C}), \text{ 则 } g \text{ 解析且 } g'(z) = \int \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{z}}(w, z) dw$$

$$\text{从而 } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - \bar{z}} f(e^{it}) dt \text{ 解析} \Rightarrow u \text{ 调和}$$

(2) u 在 $\partial B(w, r)$ 处连续.

下证: $\forall \alpha \in [-\pi, \pi], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \rho \in (0, r)$.

$$\forall z = re^{i\alpha} \text{ 设 } t \in [p, \pi], \theta \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta), \text{ 有 } |u(z) - u(e^{i\alpha})| < \varepsilon$$

$$\text{不妨设 } \alpha = 0, \text{ 取 } \delta \text{ 使 } |f(e^{i\theta}) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{3}, \theta \in (-\delta, \delta)$$

$$\text{取 } \rho \text{ 使 } |P(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi}, \text{ 其中 } M = \max\{|f(e^{i\theta})|\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u(re^{i\alpha}) - f(1)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta - t) f(e^{it}) dt - f(1) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta}^{\delta} P(\theta - t) (f(e^{it}) - f(1)) dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|t| \in [\delta, \pi]} \dots dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 唯一性: } u_1 - u_2 = 0, \quad z \in \partial D$$

$$\text{由 MMP: } u_1 - u_2 \equiv 0$$

MVT

· 中值定理: $u: G \rightarrow \mathbb{C}$ 调和, G 开, $\bar{B}(a, r) \subseteq G$,

$$\text{则 } u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta \quad (*)$$

$$\exists f \text{ 解析, } f: \bar{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} f(z) = u(z), \quad z \in \bar{B}(a, r).$$

由 Cauchy 积分公式: $\checkmark$

· 定义: 若 $\forall \bar{B}(a, r) \subseteq G$ 成立 (*), 则称 u 有 中值性质.

· 最大值原理: G 区域, $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且有中值性质,

若 $\exists a \in G, \forall z \in G, u(a) \geq u(z)$, 则 u 为常值函数.

• 最小值原理: G 区域, $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且有中值性质,

若 $\exists a \in G, \forall z \in G, u(a) \leq u(z)$. 则 u 为常值函数.

• 定义: G 区域, $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ 连续,

称 φ 为 次调和函数 ^{subharmonic}, 若 $\forall \bar{B}(a, r) \subseteq G, \varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, re^{i\theta}) d\theta$

上调和函数 ^{superharmonic}, 若 $\forall \bar{B}(a, r) \subseteq G, \varphi(a) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, re^{i\theta}) d\theta$

• Harmack's Inequality:

$u: \bar{B}(a, R) \rightarrow [0, +\infty)$ 连续, 在 $B(a, R)$ 调和, $u \geq 0, 0 \leq r < R$,

则: $\frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a) \quad \forall \theta$

对 $D = B(a, R)$, 用 $\frac{r}{R}$ 替换 r 得:

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos t + r^2} u(a + Re^{it}) dt$$

$$\text{则 } \frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos t + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r} \quad \checkmark$$