基本群与覆盖变换

一. 流形初步

· 定义: X 拓扑空间，每点处由开邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$.

则 X 称为 n 维(拓扑)流形.

$n=2$ 时称为曲面.

一般要求 X 是 Hausdorff 的、紧或局部紧(且 C_2 或仿紧)、连通(流形上: 连通 $\Leftrightarrow$ 道路连通)

注: 更细化的概念: 带有某些结构的流形(光滑. PL. 解析…)

将对图卡的转移函数提有更多要求.

例: Cantor 集不是流形. 不局部欧氏.

例: $\mathbb{R}^n$ 的 2 维正则子流形: S^2

例: $\mathbb{RP}^2$: $\mathbb{RP}^2$ 的 0 点处开邻域在 S^2 上有一个同胚、不交原像.

$\Rightarrow \mathbb{RP}^2$ 为曲面.

例: $C: z^2+w^2=1$, $(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

换元: $Z=z+iw$, $W=z-iw$ $\Rightarrow ZW=1$.

$\Rightarrow$ 解集 $\{(\lambda,\frac{1}{\lambda}): \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\}$

则: $\mathbb{C}\setminus\{0\}\to C$ 为同胚.

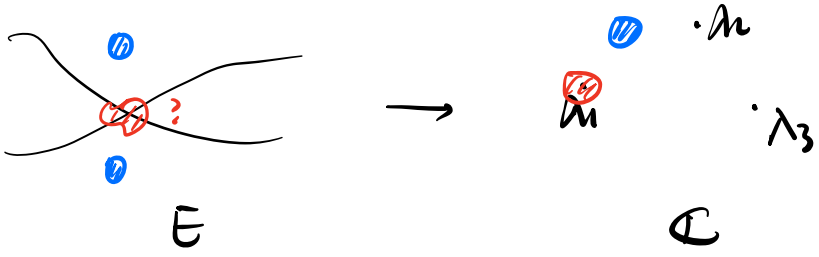
$\lambda \mapsto (\lambda,\frac{1}{\lambda})$

$\Rightarrow \mathbb{C} \approx \mathbb{C}\setminus\{0\} \approx S^2\setminus\{2点\} \approx S^1\times\mathbb{R}$

例：$E: w^2=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，$(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

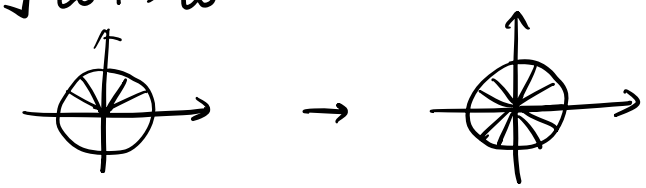
考虑 $E\to\mathbb{C}$

$(z,w)\mapsto z$



λ_1 附近：$E\to\mathbb{C}$ 类似于 $w\mapsto w^2$

"2叶分歧覆盖"：

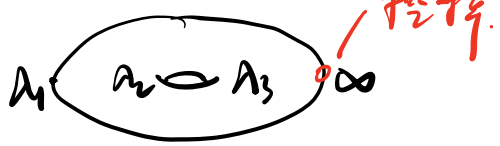


E 可以从 $\mathbb{C}$ 粘出来，例如：

取2个 $\mathbb{C}$ 的拷贝，如图all开重粘





$E \approx$ 

$\approx T^2\setminus\{1点\}$

例：(多面形粘出曲面)



连集拓扑

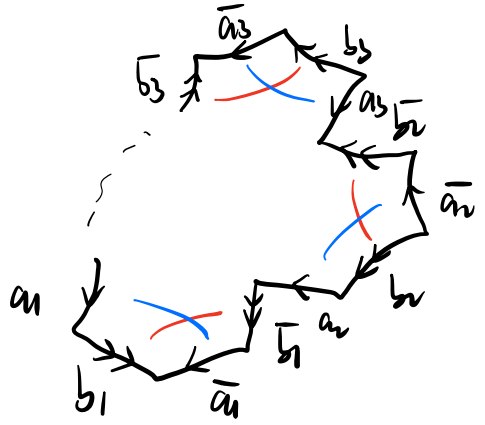
取 $[0,1]\times[0,1]$，取等价关系 $\sim$：$(x,0)\sim(x,1)$

$(0,y)\sim(1,y)$

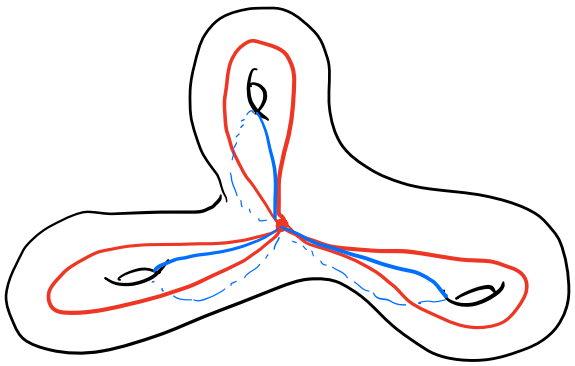
商拓扑

记 X 为所得商空间，$X\approx S^1\times S^1$

- nT^2 $(n\geq 0)$: 4n面形, 相邻4面为一组粘合



$\approx$



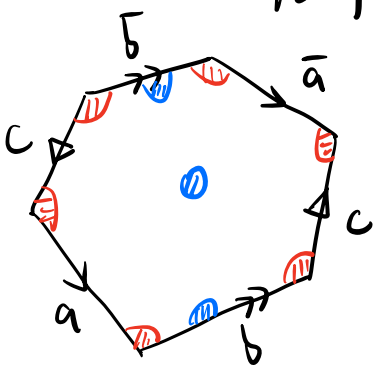
如图图形表为: $[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_n,b_n]$

其中 $[a,b]:=ab\bar{a}\bar{b}$

一般地: 给一个多余的胞腔和闭盘D.

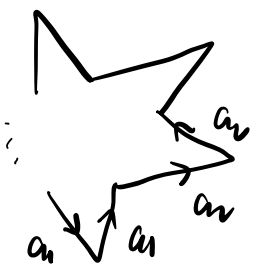
沿 ∂D 读各面 (反面记为 $\bar{a}$),

得到一个(循环和)字 "$ab\bar{a}\bar{b}c$"



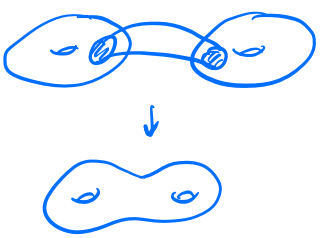
满足局部欧氏, 是曲面

- mP^2 $(m\geq 1)$: 标准字 $a_1^2a_2^2\cdots a_m^2$



引理: $nT^2 \# T^2 \approx (n+1)T^2$ 连通和

$mP^2 \# P^2 \approx (m+1)P^2$



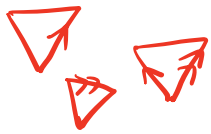
- 闭曲面分类定理: → "闭" 粘n个环柄 粘m个交叉帽

连通、紧(无边)曲面M和同胚类型由 $nT^2(n\geq 0)$, $mP^2(m\geq 1)$ 不重不漏地给出

存在性：由M可找到某 nT^2 或 mP^2 与M同胚. 利用循环字 $\xrightarrow{\text{聚理为}}$ 标准字

基本框架：

(1) 闭曲面都有三角剖分.



即可写成有限个 $\mathbb{R}^3$ 中区域 通过线性西罗等同 所得的商空间.

(2) 从三角剖分得到一个循环字主线

从一个出发，将剩余的每个三角形只沿一边粘上，直至不剩. 归纳可证

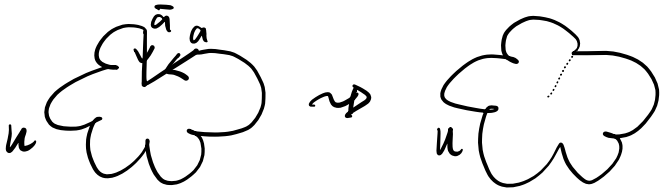
粘得的P是同胚于闭盘的多边形，未粘的边成对出现.

⇒沿西界读一周得一个M的循环字.

(3) 用不改变粘成流形同胚型的操作

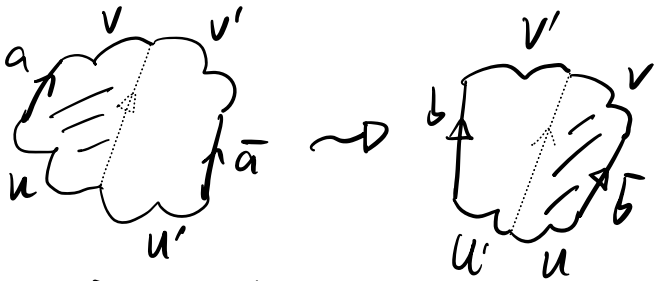
逐步将任何循环字变成标准字之一.

A: $uaā \rightsquigarrow u$



B: $avv'āu'u \rightsquigarrow bv'v'buu'$

(另有一个 $a, ā$ 同向的版本)



断言：总可通过有限步 A, B 操作完成标准化.

A: 顶点类 -1 (西对 -1)

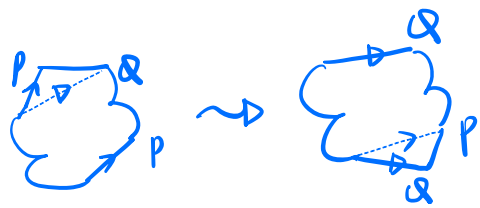
B: 顶点类不变

有无同向西时？ 有 → mP^2 ；无 → nT^2 且A, B相不改变该特征.

(4) 可用 A, B 将顶点类个数降到 1.

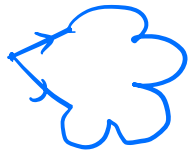
当顶点类 >1 时，

<u>操作1</u>：



可用操作1使P类点数 -1

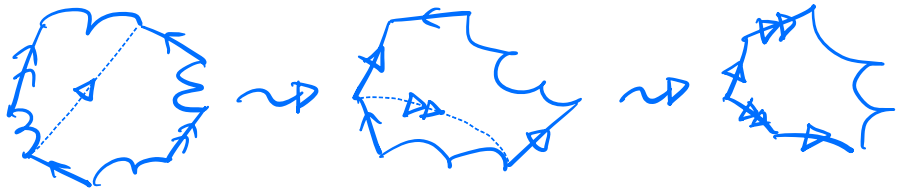
重复操作使P类点数=1，此时必为 P



下A可去掉P类点 ⇒ 顶点类数-1

(ii) 无同向对时，不断用按乃2可达到 nT^2

按乃2：



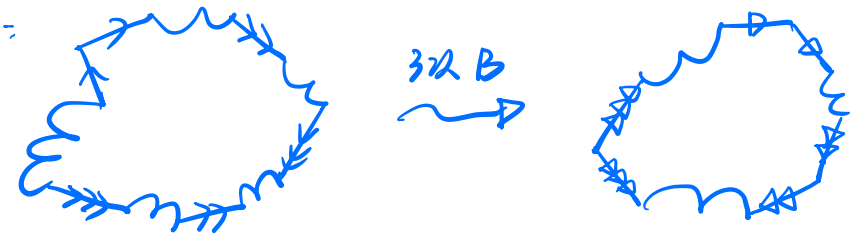
(iii) 有同向对时，用按乃3可做出一个交叉帽

可化归到：$kP^2 \# lT^2 \approx (k+2l)P^2$ 或用按乃4可到 mP^2

按乃3：



按乃4：



注：关于三角剖分：

(1) 不同正则程度的流形

- 光滑 ⇒ 拓扑流形
- 组合/PL ⇒ 归纳法
- 拓扑 ⇒ 使用基本定理

（基本方法）

(1) 光滑流形总是给出三角剖分.

组合流形显然有三角剖分.

拓扑流形：2.3维总有，>4维不一定有.

(2) 闭曲面存在三角剖分.

Jordan 闭曲线定理

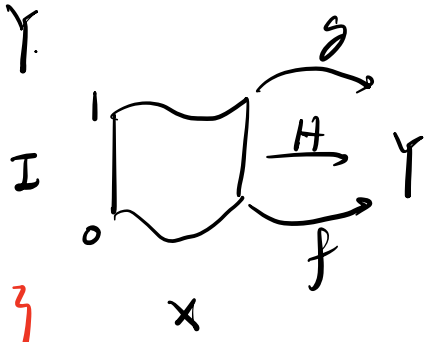
Jordan-Schoenflies

- 映射的同伦

定义：$f, g: X \to Y$ 之间的一个同伦是指一个 $H: X \times [0,1] \to Y$.

使 $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$.

记为 $f \overset{H}{\simeq} g$，其中 f, g 连续.



"范畴" $\begin{cases} \text{对象} \to \{\text{拓扑空间，连续映射}\} \\ \text{态射} \end{cases}$

- 命题：同伦是空间之间映射集合上的等价关系.

- 定义：$f, g: X \to Y$. 对 $A \subset X$，相对同伦 $f \overset{H}{\simeq} g$ rel A

指 $f = g|_A$ 且 $H(x,t) = H(x,0)$, $\forall x \in A$

注：$f, g: (X, A) \to (Y, B)$，H只要求时刻为 $(X,A) \to (Y,B)$

称为空间偶之间的同伦.

- 定义：X, Y 称为伦型相同，若存同伦等价 $f: X \to Y$.

即：$\exists g: Y \to X$, $f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$

- 基本群：拓扑空间 X, $x_0 \in X$ 是一个指定基点.

记 $\pi_1(X, x_0) = \{x_0$ 基点处闭道路的定端点同伦类$\}$

x_0 基点处闭道路：$a: [0,1] \to X$, $a(0) = a(1) = x_0$

定端点同伦类：$a \overset{\cdot}{\simeq} a' \Leftrightarrow a \simeq a'$ rel $\{0,1\}$，记作 $\langle a \rangle$

$\pi_1(X, x_0)$ 上可引进群乘法：$\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$,

其中 $ab:[0,1]\to X$，$ab(t)=\begin{cases}a(2t), & t\in[0,\frac12]\\ b(2t-1), & t\in[\frac12,1]\end{cases}$

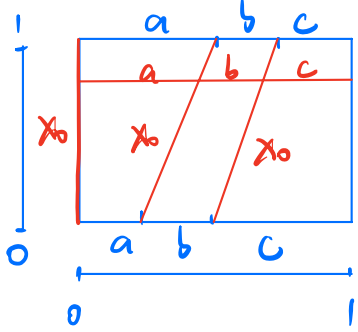
- 命题：$\pi_1(X,x_0)$ 关于上述乘法良定，且构成群

  满足 $id=\langle const\ x_0\rangle$，$\langle a\rangle^{-1}=\langle\bar a\rangle$，其中 $\bar a(t)=a(1-t)$

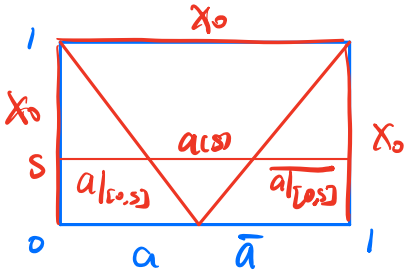
结合律：$\langle ab\rangle\langle c\rangle=\langle a\rangle\langle bc\rangle$

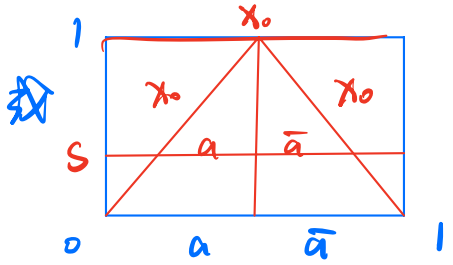
可写出 $H:[0,1]\times[0,1]\to X$

给出道路同伦.



逆元：$\langle a\rangle\langle\bar a\rangle=id$





- 定义：$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 诱导群同态 $f_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$

  $\langle a\rangle\mapsto\langle f\circ a\rangle$

  则：$f_\#\circ g_\#=(f\circ g)_\#$

  $id_\#=id$

注：π_1 是{带基点的拓扑空间，保基点映射}$\to$ {群，群同态} 的函子.

{空间，映射}，{带基点空间，保基点映射}，{空间偶，空间偶映射}

普通 H_*,H^*　　π_1，π_n，简约 $\tilde H_*$，$\tilde H^*$　　(X,A)　$(X,A)\mapsto(Y,B)$

相对 H_*，H^*

- 基本群与基点选取的关系

命题：$\forall$ 连接 x_0 到 x_1 的定端点道路类 $\gamma=\langle c\rangle$ 唯一诱导同构

$\gamma_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$ 使得 $\langle a\rangle\mapsto\langle\bar c a c\rangle$

推论：$\pi_1(X,x_0)$ 的同构型只依赖于 x_0 所在的道路连通分支

- 如何计算基本群？
- 引理：$f \simeq g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$

  $\Rightarrow f_\# \cong g_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$

- 推论：f 是 X_0 道路分支到 Y_0 道路分支的同伦等价 $\Rightarrow f_\#$ 是同构.

  $X \simeq pt \Rightarrow \pi_1(X) \cong \{1\}$

  $g \circ f \simeq id_X \Rightarrow g_\# \circ f_\# = (gf)_\# \cong id_\#$ 为同构 $\Rightarrow g_\#$ 满，$f_\#$ 单

  同理 $f_\# \cdot g_\#$ 为同构 $\Rightarrow f_\#$ 满，$g_\#$ 单 $\Rightarrow f_\#$ 为同构.

- 定义：$X \simeq pt$，称 X 为可缩空间

  例：（可缩空间）$\mathbb{R}^n$ 中凸集、树、

  拓扑锥：$X \rightsquigarrow CX = X \times [0,1] / X \times \{0\}$ （基点为锥点）

- 定义：（形变收缩核）

  收缩：$A \subset X$，$r : X \to X$，$r|_A = id_A$ 且 $r(X) \subset A$

  形变收缩：$r : X \to X$ 是到 A 的收缩，$r \simeq id_X$

  称 A 为 X 的一个形变收缩核（DR），则 $A \simeq X$

  即：$i : A \to X$ 为含入映射，$r : X \to A$，

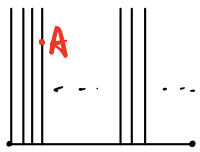
  $r \circ i = id_A$，$i \circ r \simeq id_X$.

  道路连通 $\Rightarrow \pi_1(A) \cong \pi_1(X)$.

  注：强形变收缩（SDR）：加强为 $i \circ r \simeq id_X$ rel A

例：（形变收缩核而非强形变收缩核）

"篱子"：$([0,1)\times\{0\})\cup(\{0,1\}_{\mathbb{Q}}\times[0,1])$



例：$\pi_1(S^n)\cong\begin{cases}\{1\}, & n\geq 2\\ \mathbb{Z}, & n=1\end{cases}$

下证：$\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$.

$\forall a:(S^1,x_0)\to(S^1,x_0)$ 唯一决定映射 $[0,1]\xrightarrow{\tilde{a}}(\mathbb{R},0)$

万有覆盖空间

使得 (S^1,x_0) 等同于 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},0)$

$a(t)=\tilde{a}(t) \bmod \mathbb{Z}$.

$\mathbb{R}\to S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是局部同胚.

$\Rightarrow$ 存在唯一提升 $\tilde{a}$ 使 $\tilde{a}(0)=0$

且 $\tilde{a}(1)$ 只取决于定端同伦类.

$\varphi:\pi_1(S^1,x_0)\to\mathbb{Z}$

$\alpha=[a]\mapsto\tilde{a}(1)$

（单：$\tilde{a}\simeq\text{const}\ 0\Rightarrow a\simeq\text{const}\ x_0$）

- **Van Kampen 定理**：左用："粘起来"后空间.

$X=U'\cup U''$，U',U'' 开，$U'\cap U''$ 道路连通，$x_0\in U'\cap U''$.

则：$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(U',x_0)*\pi_1(U'',x_0)$

$/\langle\langle i'_\#(\delta)\,i''_\#(\delta^{-1}):\delta\in\pi_1(U'\cap U'',x_0)\rangle\rangle$

正规闭包

注：(1) 若 V',V'' 闭 且 $V'\cap V''$ 是它在 X 中一个开邻域的强形变收缩核，

结论也成立

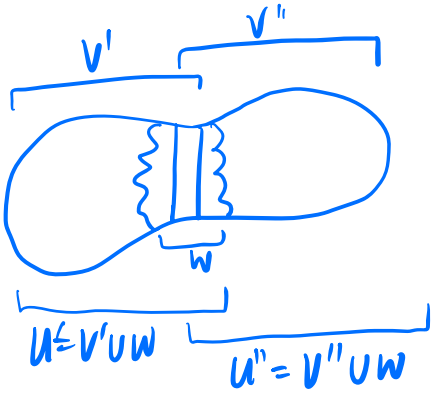
V', V'' 闭 $\Rightarrow U', U''$ 开，可用 Van Kampen

$V' \cap V'' \simeq W$

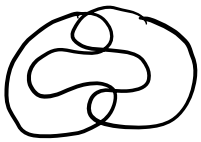
考虑强形变收缩在 $V'' \cap W$.

存在 V' 上以恒同迷据. $\Rightarrow U' \simeq V'$

同理，$U'' \simeq V'$



(2) $U' \cap U''$ 道路连通而余件是必需的.



例：$\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1) \cong F_m = \langle x_1, \cdots, x_m \rangle$ 自由群.

m 个

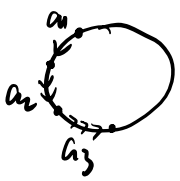
π_1  $\cong \pi_1(\bigvee_{i=1}^{5} S^1_i)$

例：(晓帽) $X =$  粘 



$\pi_1(X) = \dfrac{\langle a \rangle * \{1\}}{\ll a a^{-1} a \cdot 1 \gg} = \{1\}$

$\iota'_{\#}(c)$ $\iota''_{\#}(c)$

进一步，$w_1 = a_1 a_n a_3 \cdots$  粘 

$w_2, w_3, \cdots$ 逐个粘上

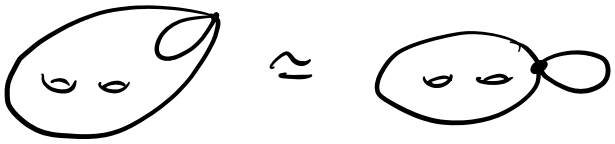
例：$\pi_1(X) = \langle a_1, \cdots, a_n : w_1 = w_2 = \cdots = 1 \rangle$

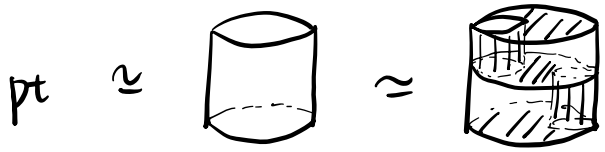
注：事实上晓帽是可缩空间 基本群平凡不一定可缩！

$X \simeq$  $\cup$  $\simeq$  $\cup$ 

$\simeq$  $\cup$  $\simeq$  $\simeq pt$

同调，





· 闭曲面分类定理的唯一性部分：

(1) 称性字的复述：$\pi_1(\#T^2) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n : [a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n] = 1 \rangle$

$\pi_1(\#P^2) = \langle a_1, \cdots, a_m : a_1^2 a_2^2 \cdots a_m^2 = 1 \rangle$

⇒ 只需说明以上群互不同构.

(2) 用交换化来区分！

有限生成 Abel 群有分类定理：

$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_d\mathbb{Z}$，其中 $r = 0, 1, \cdots$，$m_1 | m_2 | \cdots | m_d$

自由部分　　挠部分

A 的秩 $\operatorname{rank} A = r$，$|A_{tors}| = m_1 m_2 \cdots m_d$ 均为不变量.

群的交换化：$G \to G^{ab} = G/G'$，其中 $G' = \langle ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G \rangle$

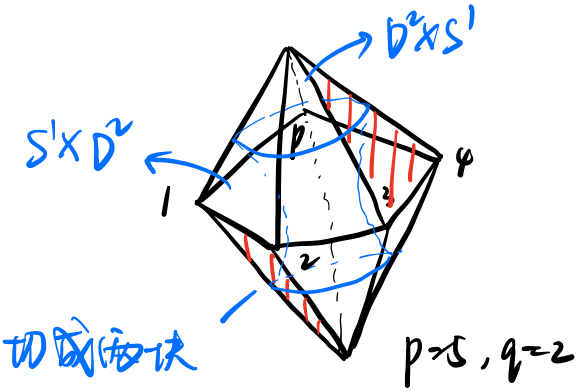
$\pi_1(\#T^2)^{ab} \cong \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \mathbb{Z}_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_n} \oplus \mathbb{Z}_{\beta_n} \cong \mathbb{Z}^{2n}$

$\pi_1(\#P^2)^{ab} \cong \operatorname{Coker}(\mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2$

从而唯一性得证.

例：(透镜空间) $L(p, q)$，$(p, q) = 1$

粘成闭的三维流形.



零格查顶点处是否粘成 D^3

$L(p, q) = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$ 依某种方式粘合.

Van Kampen: $\pi_1(L(p,q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

· 怎样表示一个群？

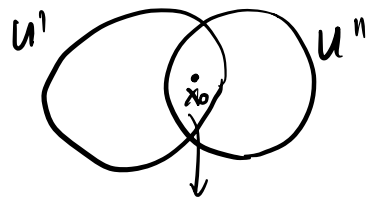
① 群呈现：生成元、关系、字处理 ↕ 相互间转化较困难.

② 群作用

可借助基本群作用在复叠空间上来研究基本群的交换性.

· Van Kampen 定理证明概要：

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U') * \pi_1(U'')}{\langle\langle j'_\#(\delta) \cdot j''_\#(\delta)^{-1} : \delta \in \pi_1(U' \cap U'', x_0) \rangle\rangle}$$



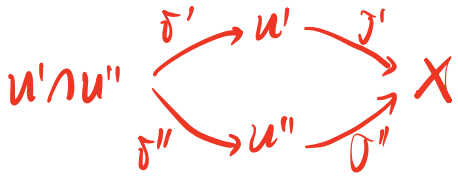
$\varphi: \pi_1(U') * \pi_1(U'') \xrightarrow{j'_\# * j''_\#} \pi_1(X, x_0)$

即由 $j'_\#, j''_\#$ 唯一决定一个群同态 φ.

且 $j'_\#(\delta) \cdot j''_\#(\delta)^{-1} \in \ker\varphi$

下证 φ 为同构. 证即单又满 或 构造逆同态.

$U' \cap U''$ 道路连通



建立映射：$\mathcal{L}(X, x_0) \to \frac{\pi_1(U') * \pi_1(U'')}{\langle\langle \cdots \rangle\rangle}$ 如下：

X 中 x_0 为基点的同道路取集合，$\pi_1(X, x_0) = \mathcal{L}(X, x_0)/\simeq$

$\gamma: [0,1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, 取 $0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_{k+1} < q_k = 1$.

使 $\gamma([q_i, q_{i+1}])$ 交错含于 U' 或 U'' → 用到 U', U'' 开且 $[0,1]$ 紧.

用到 $U' \cap U''$ 道路连通

取 $U' \cap U''$ 中 $\gamma(q_i)$ 到 x_0 取道路 c_i.

对 γ 所给 a_1 与 $\cdots$ a_k (对应信息).

将 γ 映为 $[a_1 c_1][\bar{c}_1 a_2 c_2] \cdots [\bar{c}_{k-1} a_k]$

需验证良定义：

(1) 当 q_i 取定，若 c_i 换成 c_i',

$$\text{例 } X c_i \bar{c}_i Y = X c_i \bar{c}_i c_i' \bar{c}_i' c_i \bar{c}_i Y \quad (w \delta = \bar{c}_i c_i')$$
$$= X c_i \bar{c}_i Y \underline{(\bar{c}_i' c_i) \gamma(\delta) \gamma(\delta)^{-1} \bar{c}_i' Y} \in \langle\langle \cdots \rangle\rangle$$

w 与分立位置元关：



相当于用 $\langle\langle \cdots \rangle\rangle$ 中字替换

(3) 交换立同伦加不变性：

欠零论：孔小扰动下不变. (划分为网格)

- 基本群的应用

例：(Brouwer不动点定理)

$f: D^n \to D^n$ 连续 ($D^n \subset \mathbb{R}^n$ 紧单位球)，则 f 有不动点.

$n=2$ 时：反证：若 f 不动点，构造 $g: D^2 \to S^1$，

$g(y)$ 为 $f(y)$ 与 y 连线向与 S^1 的交点.

则 g 为收缩映射且 g 连续

任取 $x_0 \in S^1$，$\pi_1(D^2, x_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(S^1, x_0)$ 为满.

但 $\pi_1(D^2, x_0) \cong \{1\}$，$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

$n \geq 3$ 时：用 π_n 或 H_n 类似可证.

注：该定理可推出：道路不变性、区域不变性、维数不变性

- 复叠空间

定义：$p: \tilde{X} \to X$ 称为复叠映射，

若 p 满 且 $\forall x \in X$，$\exists U = U(x) \in X$，s.t. $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$，

其中 $\{\tilde{U}_\alpha\}$ 为 $\tilde{X}$ 的互不交的开集，且 $p|_{\tilde{U}_\alpha}: \tilde{U}_\alpha \to U$ 同胚.

e.g.  不是复叠.

注: (1) 常假设 $\tilde{X}$ 道路连通、局部道路连通 为了使与 $\pi_1(X)$ 有好的对应

(2) 用常于 Hausdorff 空间.

· 定义: X 底空间，$\tilde{X}$ 复叠空间，$p^{-1}(x)$ 纤维，$\mathrm{Card}(p^{-1}(x))$ 称为纤叶数.

注: X 道路连通时，叶数不依赖于 x 的选取.

复叠空间是"纤维为离散集的纤维丛"

例: (1) $S^1 = U(1) \subset \mathbb{C}$, $p: S^1 \to S^1$, $p(z) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(2) $\mathbb{R} \to S: r \mapsto e^{i\pi r}$

(3) 若将 (1), (2) 中映射看作 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，则它们不是我们讨论的复叠映射

有时将其称作分歧复叠映射，像中 $0 \in \mathbb{C}$ 为分歧点.

(4) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})\setminus\{\det = 0\}$

$p_M: S^1\times S^1 \to S^1\times S^1$, $p_M(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$

$\det M = \pm 1$, p_M 为同胚

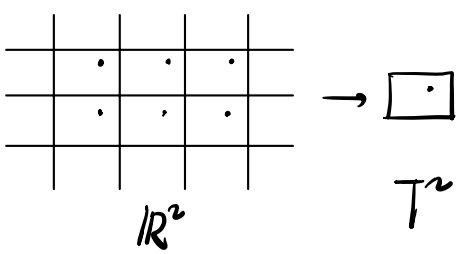
$\det M \neq 0$, p_M 为叶数 $|\det(M)|$ 的复叠.

M分解为基本初等矩阵的复合可证.

(5) 取 $\mathbb{R}^2$ 中格 $L = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$, $a, b \in \mathbb{R}^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

商映射: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/L$ 是复叠.

$v \mapsto v \bmod L$



(6) $\mathbb{Q}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 不是复叠

· 复叠的同构：$\tilde{X} \xrightarrow{\exists \tau} \tilde{X}'$，$p: \tilde{X} \to X$，$p': \tilde{X}' \to X$，使 $p = p' \circ \tau$ 且 τ 同胚

· 复叠的等价：
$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\exists \tilde{G}} & \tilde{X}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{\exists G} & X' \end{array}$$
使 $p' \circ \tilde{G} = G \circ p$ 且 G、$\tilde{G}$ 同胚

注：与 π_1 有关的主要是给定空间 X 上复叠的同构分类

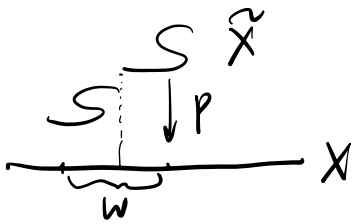
例：上例(4)中，P_M 与 P_N 同构 $\Leftrightarrow M = NT$，$T \in GL(2,\mathbb{Z})$

P_M 与 P_N 等价 $\Leftrightarrow SM = N\tilde{S}$，$S, \tilde{S} \in GL(2,\mathbb{Z})$

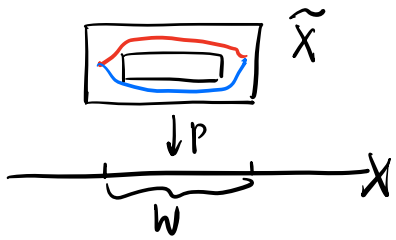
· 映射的提升问题：
$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \overset{\exists \tilde{f}?}{\nearrow} & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$
$\tilde{f}$ 是否 $\exists$？是否 $!$？

一般而言：

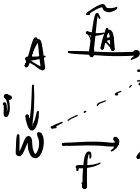
不存在：



不唯一：



注： 

：延拓问题，


：延拓提升问题.

· **提升定理**：$\tilde{X}, X$ 道路连通，$x_0 \in X$，$p: \tilde{X} \to X$ 复叠，$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

W 道路连通、局部道路连通，$w_0 \in W$，

$f: (W, w_0) \to (X, x_0)$ 连续映射.

则 $\exists ! \tilde{f}: (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

$\Leftrightarrow f_\#(\pi_1(W, w_0)) \subseteq p_\#(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

* 连通性条件有什么用？

(1) 必要性：显然 → $\tilde{f}$ 连续 ⇒ 闭路映为闭路.

$$f_{\#}(\pi_1(W,w_0)) = p_{\#}\circ\tilde{f}_{\#}(\pi_1(W,w_0)) \subseteq p_{\#}(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$$

(2) 充分性：构造 $\tilde{f}$ 如下：

$\forall w_1 \in W$, $\exists$ w_0 到 w_1 的道路 a

⇒ $f\circ a$ 的定义提升为 $\tilde{X}$ 中道路 $\tilde{f}\circ a$

取 $\tilde{f}(w_1) = \tilde{f}\circ a(1)$，下证 $\tilde{f}$ 良定.

- $\tilde{f}\circ a$ 的存在性：取 a 的有限覆盖，利用 p 为复叠.

  由 $\tilde{f}\circ a$ 由 $\tilde{f}(w_0)=\tilde{x}_0$ 的唯一提升决定.

- $\tilde{f}$ 不依赖于 $\tilde{f}\circ a$：由上和 $\tilde{f}\circ a$ 唯一.

- $\tilde{f}$ 不依赖于 a：下证 $\tilde{f}\circ a'(1) = \tilde{f}\circ a(1)$.

  ⇔ $\forall$ w_0 处闭路 a, $\tilde{f}\circ a(1) = \tilde{x}_0$

  即 $[a]\in\pi_1(W,w_0)$, $f_{\#}([a])\in\pi_1(X,x_0)$.

  由条件：$f_{\#}([a])\in p_{\#}(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$

  ⇒ $\exists$ $\tilde{X}$ 中 $\tilde{x}_0$ 处闭路 $\tilde{b}$, $p_{\#}([\tilde{b}]) = f_{\#}([a])$.

  ⇒ $f\circ a \simeq p\circ\tilde{b}$

  ⇒ $\tilde{f}\circ a(1) = \tilde{b}(1) = \tilde{x}_0$ ✓

- $\tilde{f}$ 的连续性：$\forall$ $\tilde{X}$ 中开集 $\tilde{U}$，要证 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U})$ 在 W 中开.

  不妨假设 $\tilde{U}$ 足够小使 $\tilde{U}$ 为 $\tilde{U}$ 的同胚提升.

  f 连续 ⇒ $f^{-1}(U)\subset W$ 为开集.

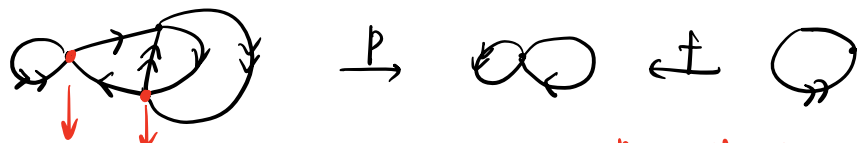
  即 W 局部道路连通

  ⇒ $\tilde{f}$ 把 $f^{-1}(U)$ 中 w_0 邻域映到 $\tilde{U}$ 中某邻域.

$\exists$ 关于 x_0 附近连通. 类似知关于 $\forall \tilde{x}_1 \in \tilde{W}$ 也连通.

(3) 唯一性: 由 p 覆盖, 关于 $\tilde{x}_0$ 而原像附近成立. 由道路开始 ✓

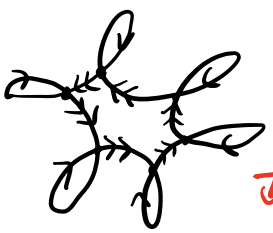
例:



$\exists$ 提升 $\nexists$ 提升

提升依赖于基点 $\tilde{x}_0$!

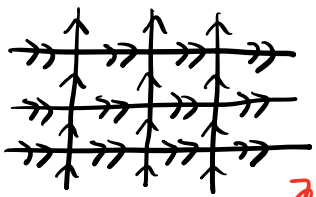
例:  $S^1 \vee S^1$ 的覆盖:



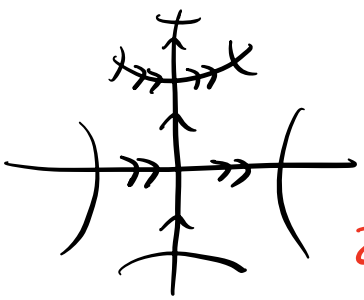
正则



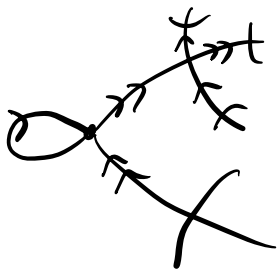
非正则



正则

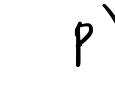


正则



非正则.

- 定义: 设 $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ 覆盖. 记 $\tilde{X} \to \tilde{X}$ 为覆盖变换 (deck transformation), 若 $\tilde{X} \xrightarrow{\varphi} \tilde{X}$ 连续且 φ 为同胚 (覆盖映射的自同构)



注: 覆盖变换保持 $p^{-1}(x_0)$ 不变.

覆盖变换在合成下 $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ 构成群.

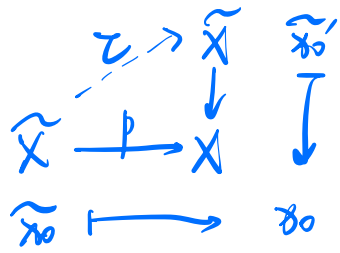
且给出 $p^{-1}(x_0)$ 的一个置换.

设 $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ 称为正则 (regular) 覆盖, 若 $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ 在 $p^{-1}(x_0)$ 上作用是传递的,

即: $\forall \tilde{x}_0, \tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$, $\exists \varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$, $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$

· 定理：$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ 正则 $\Leftrightarrow$ $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ 在 $\pi_1(X, x_0)$ 中正规.

证：



$\tilde{X}$ 的存在性由提升定理保证.

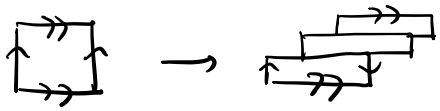
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\tilde{\omega}_{\#}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \\ \downarrow p_{\#} & & \downarrow p_{\#} \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\approx]{(p\circ\tilde{\omega})_{\#}} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ 正则

$\Leftrightarrow p_{\#} \cdot \tilde{\omega}_{\#} = (p\circ\tilde{\omega})_{\#} \cdot p_{\#}$

$\Leftrightarrow p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ 正规.

例：T^2 的复叠：$\pi_1 \cong \mathbb{Z}^2$



$S^1 \vee S^1$ 的复叠：$\pi_1 \cong F_2$



· Galois 对应

复叠	基本群
完备点复叠的同构类	子群：$H < G$
正则…	正规…：$N \triangleleft G$
复叠的复叠	子群的子群
正则复叠的复叠变换群	商群：G/N
复叠的复叠变换群	$N_G(H)/H$

域的 Galois 对应：

E'' … $Gal(E''/F)$

E' … $Gal(E'/F)$

F

(对应分歧复叠)

练习：正则复叠的正则复叠未必正则.

$$\{e, a\} \triangleleft \{e, a, b^2, ab^2\} \triangleleft \{e, b, b^2, b^3, a, ab, ab^2, ab^3\} = D_4$$

· 定理：$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$，$\tilde{X}$ 道路连通、局部道路连通，

若 $\pi_1(\tilde{X}, x_0)$ 平凡，则称为**万有复叠**

· 命题：(万有性质) $\tilde{X}$ 上 X 万有.

对 $\forall \tilde{X}'$ 上 X，$\exists!$ 提升 $\tilde{p}$ 使图表交换

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\exists!\tilde{p}} & \tilde{X}' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & X & \end{array}$$

万有复盖空间是所有其他复盖空间和复盖空间

提升定理 $\Rightarrow \exists \tilde{p}$；$\mathrm{Hom}(G), G$ 元素性一 $\Rightarrow \tilde{p}$ 性一.

· 性质：X 上万有复盖存在，则同构性一.

由万有性质：$\tilde{X} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \tilde{X}'$ $\Rightarrow \varphi\cdot\psi = \psi\cdot\varphi = \mathrm{id} \Rightarrow \varphi, \psi$ 为同构.

$p \searrow X \swarrow p'$

· 定理：(万有复盖的存在性)

(X, x_0) 道路连通、局部道路连通、局部单连通，则 $\exists$ 万有复盖

* 局部单连通：$\forall y \in X$，$\exists$ 邻域 $U = U(y)$，使 $\pi_1(U, y) \to \pi_1(X, y)$ 像为 $\{1\}$.

构造：

(1) 考虑 $P(X, x_0) = \{$以 x_0 为基点的道路$\} \subset C([0,1] \to X)$

道路空间　　赋予紧开拓扑：

有典范基点 $\mathrm{const}\ x_0 : [0,1] \to X$　　开集由 $\{C(K, U),\ K$紧，U开$\}$ 生成

(2) 令 $\tilde{X} = P(X, x_0)/\dot{\simeq}$，$\tilde{x}_0 = \langle \mathrm{const}\ x_0 \rangle$，$\langle\rangle$ 为 $\simeq$ 等价类.

$\tilde{X}$ 赋予商拓扑

(3) 令 $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$，断言 $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是 (X, x_0) 的一个万有复盖.

$\langle a \rangle \mapsto a(1)$

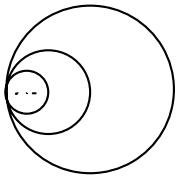
① p 为复盖　局部单连通：用于说明 U 充分小时，U 上 X 单.

* 理解 $\tilde{X}$ 中开集：由如下生成：$U \subset X$ 为道路连通子集

$$\mathcal{U}(U, y) := [a c \in \tilde{X} : c \in P(U, y)]$$

② $\tilde{X}$ 单连通　用 $P(X, x_0)$ 可缩.

例：(复叙述平环) 普万有覆盖：聚点的原像附近不单连通.



$\pi_1 \to *^n\mathbb{Z}$ 有限秩群.

非局部单连通

· 关于万有覆盖： $p_\#(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)) \lhd \pi_1(X,x_0)$

$\Rightarrow \tilde{X} \to X$ 正则覆盖. 一般的覆盖 $p:\tilde{X}\to X$

命题： $Deck(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x_0)$ $Deck(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x_0)/p_\#(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$

(1) $\tilde{X} \xrightarrow{\tau} \tilde{X}$ $\tau \in Deck(\tilde{X}/X)$ 由 $\tau(\tilde{x}_0) \in p^{-1}(x_0)$ 唯一决定.

$p \searrow X \swarrow p$ 由完备左道路提升的唯一性.

(2) $\forall \tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$. 存在 $\tau \in Deck(\tilde{X}/X)$, $\tau(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0'$

$(\tilde{X},\tilde{x}_0) \xrightarrow{\tau} (\tilde{X},\tilde{x}_0')$ 可验证 τ 是覆盖变换.

$p \searrow (X,x_0) \swarrow p$

(3) $Deck(\tilde{X}/X) \hookrightarrow p^{-1}(x_0) \hookrightarrow \pi_1(X,x_0)$

(4) $\pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\varphi} Deck(\tilde{X}/X)$

$\langle a\rangle \mapsto \tau_{\langle a\rangle}: \tilde{X}\to\tilde{X}$ 使 $\tau_{\langle a\rangle}(\tilde{x}_0) = \widetilde{a}(1) \in p^{-1}(x_0)$

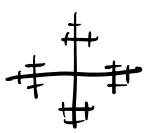
从而 $\varphi(\langle a\rangle\langle b\rangle) = \tau_{\langle ab\rangle} = \tau_{\langle a\rangle}\circ\tau_{\langle b\rangle} = \varphi(\langle a\rangle)\varphi(\langle b\rangle)$

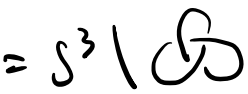
$\Rightarrow$ φ 为群同态，也为 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\tilde{X}$ 上的覆盖变换群作用.

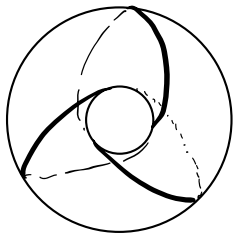
例：万有覆盖空间：(1) $\tilde{S^1}=S^1$

$\tilde{T^n}=\mathbb{R}^n$, $Deck(\tilde{T^n}/T^n)=\mathbb{Z}^n$ 平移作用.

$\tilde{\Sigma_g}\approx \mathbb{H}^2$

$\widetilde{S^1\vee S^1} \approx$ 

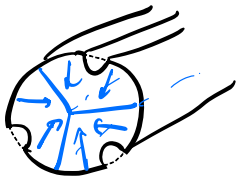
(2) $X = S^3 \setminus$  → "3_1" 三叶结

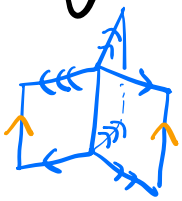


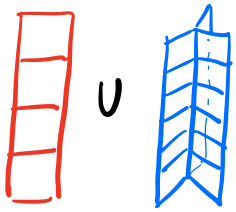
内 tori： 



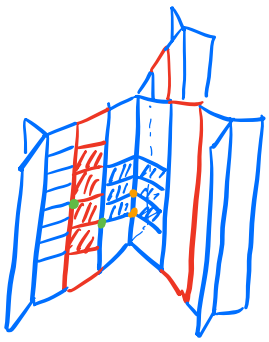
$\cup \quad \approx S^3 \setminus 3_1$

外 tori： 



互有重叠： 

$\cup$

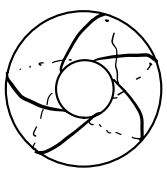
$\rightarrow$ 

a

b

$\pi_1(S^3 \setminus 3_1) \cong \langle a, b \rangle / \langle\langle a^2 b^{-3} \rangle\rangle \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$

$c = a^2 = b^3$，$\langle c \rangle$ 包含在中心中，$\langle c \rangle$ 为无限循环群

(3) 

$T_{p,q}$ （上面为 $T_{2,3}$）

(4) 8字结：  4_1 $\pi_1(S^3 \setminus 4_1)$ 无限，中心平凡

↪ $PSL(2, \mathbb{C})$ 成为离散子群

· 关于复叠变换群作用

定义：自由不连续群作用：

$G \times X \to X$ 同胚作用，即 $G \to Hom(X)$

且 $\forall x \in X$，$\exists U = U(x) \subset X$，$u$ 开，$gU \cap U \neq \emptyset$ 当且仅当 $g = 1$

· 命题：覆叠变换群 $Deck(\tilde{X}/X)$ 在 $\forall$ 覆叠 $\tilde{X}\to X$ 上作用自由不连续

· 命题：X 道路连通、局部道路连通，$G\curvearrowright X$ 自由不连续

则商映射 $X\to X/G$ 是正则覆叠.

且 $G\curvearrowright X$ 是覆叠变换作用

即：$G\cong Deck(X:X/G)$，其中 X/G 是 G-轨道空间.

- $p_*(\pi_1(X))\lhd \pi_1(X/G)$ 像商群同构于 G $\Rightarrow Deck(X:X/G)\cong G$
- $X\xrightarrow{p} X/G$ 是覆叠.

$\forall [x]\in X/G$，$\exists \tilde{U}=\tilde{U}(x)\subset X$，如自由不连续定义，称此 $p(\tilde{U})$.

例：(自由不连续) $\Gamma<Isom(\mathbb{E}^2)$，$\Gamma=\langle a,b\rangle$

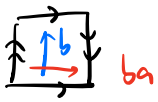
$a:(x,y)\mapsto(x+1,-y)$，$b:(x,y)\mapsto(x,y+1)$.

$D=[0,1]\times[0,1]$ 为 Γ 的基本区域，即 $\bigcup_{g\in\Gamma} gD=\mathbb{E}^2$，$D\cap gD\subset \partial D$，$\forall g\neq 1$.

$N=\langle a^2,b\rangle\lhd\Gamma$，$[\Gamma:N]=2$，$N$ 以 $D\cup aD$ 为基本区域

由此易验证 Γ 在 $\mathbb{E}^2$ 上作用自由不连续.

覆叠 $\mathbb{E}^2\to \mathbb{E}^2/\Gamma$，$\mathbb{E}^2/\Gamma\approx$ Klein瓶



properly discontinuous

· 定义：<u>恰当不连续</u>群作用：

$G\times X\to X$ 同胚作用　　紧集的原像是紧集.

且 $\forall K\subset X$ 紧，$gK\cap K\neq\varnothing$ 只对有限多个 $g\in G$ 成立.

例：(恰当不连续)　　$\langle a,b,c\rangle<Isom(\mathbb{E}^2)$

$a:(x,y)\mapsto(x+1,y)$, $b:(x,y)\mapsto(x,y+1)$, $c:(x,y)\mapsto(-x,-y)$

- 命题：群 G，X 局部紧、Hausdorff，$G\curvearrowright X$ 恰当不连续

  则 X/G 局部紧、Hausdorff

  $\forall\ [x],[y]\in X/G$.

  取 $x,y\in X$ 及其分离紧邻域 $K(x)$, $K(y)$, $K(x)\cap K(y)=\phi$.

  作 $\widetilde{K}(x)=\bigcup_{g:\,x\in g\,\mathrm{int}K(x)} gK(x)$, $\widetilde{K}(y)$ 类似.

  则 $\widetilde{K}(x)$, $\widetilde{K}(y)$ 嵌入 X/G 且分离 $[x]$, $[y]$.

  局部紧也由 $\widetilde{K}(x)$ 构造

- 定义：$G\curvearrowright X$ 置换作用

  自由：$\forall x\in X$, $gx=x$ 只对 $g=e$ 成立.

- 命题：群 G，X 局部紧、Hausdorff，$G\curvearrowright X$ 恰当不连续、自由

  则：$G\curvearrowright X$ 自由不连续　　自由 + 恰当不连续 $\Rightarrow$ 自由不连续.

  取 $\widetilde{U}(x)=\mathrm{int}(\widetilde{K}(x))$

  若 $g\widetilde{U}(x)\cap\widetilde{U}(x)\neq\phi$，则 $g\widetilde{K}(x)=\widetilde{K}(x)\Rightarrow gx=x$

- 推论：群 G，X 局部紧、Hausdorff，$G\curvearrowright X$ 恰当不连续、无挠

  则：$G\curvearrowright X$ 自由不连续

  若不自由 $\Rightarrow\exists g\neq e$, $x\in X$, $gx=x$

  $\Rightarrow g^j x=x$, $\forall j\in\mathbb{Z}$

由性质不连续：$\exists g_0 \neq id$, $g^{n_0} = 1$. $\Rightarrow g$ 为椭元素，矛盾.

故 $G \curvearrowright X$ 自由.

注：$\Leftarrow$ 不成立. $S^2 \to \mathbb{RP}^2$，考虑 $Deck(S^2/\mathbb{RP}^2)$ 作用.

例：(非性质连续) $\Gamma = \langle a \rangle \in Aff(\mathbb{E}^2)$, $a: (x, y) \mapsto (2x, \frac{y}{2})$. 0处非恰当.

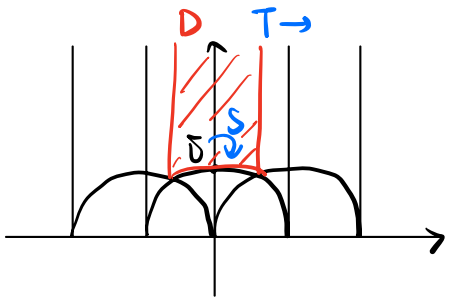
$\mathbb{E}^2/\Gamma$ 非 Hausdorff

例：$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$.

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $g: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : z \mapsto -\frac{1}{z}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \mapsto z+1$.



D 为 $\Gamma = \langle S, T \rangle$ 的基本区域.

用 D 论证知 $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^2$ 性质不连续

$\Gamma(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2 \right\}$ 模2主同余子群.

可验证：$\Gamma(2)$ 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 生成的无挠子群，事实上是自由群.

指数为6 $\Gamma(2) \lhd \Gamma$, $\Gamma/\Gamma(2) \cong SL(2, \mathbb{Z}_2)$

$\Rightarrow \Gamma(2) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ 是自由不连续群作用.

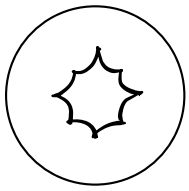
$\Rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma(2)$ 是2维流形 (双曲曲面)

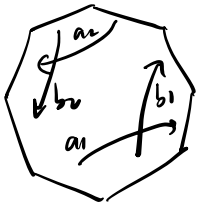
且 $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2/\Gamma(2)$ 是复叠 (万有复叠)

基本群 $\cong \Gamma(2) \cong F_2$



例：$S=2T^2$，$\pi_1(S)=\langle a_1,a_2,b_1,b_2 : [a_1,b_1][a_2,b_2]=1\rangle$





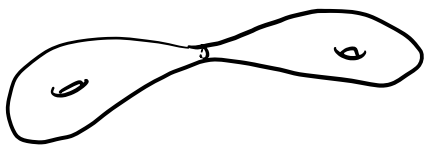
(1) $C=[a_1,b_1]=[a_2,b_2]^{-1}\neq 1$.

(2) $\int_S K\,dArea_S=-2\pi\chi(S)$

(3) 双曲多边形内角和 $=2\pi$

⇝ 等边形双曲曲面.

Teichmüller 理论：





- 基本群和一些经典应用

1. 流形边界点不变性：

X：n 维流形

$x\in X$，$\exists U\cong\mathbb{R}^n$：内点

$x\in\partial X$，$\exists V\cong\mathbb{R}^{n-1}\times[0,+\infty)$：边界点

引理：边界点不是内点

考虑 α 邻域 U,V，$U\xrightarrow{g}\mathbb{R}^n$，$V\xrightarrow{f}\mathbb{R}^{n-1}\times[0,+\infty)$

$h=gf^{-1}|_{U\cap V}$，不妨 $f(U\cap V)\cong B^+$（上半圆盘）

考虑 $h: B^+\setminus f(\alpha)\to h(B^+\setminus f(\alpha))$ 为同胚

但 $\pi_1(B^+\setminus f(\alpha))=\{1\}\neq\pi(h(B^+\setminus f(\alpha)))$

2. 维数不变性：$\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$，$n\neq m$.

$\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{p\})\neq 1$，$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus\{p\})=1$

3. 区域不变性定理：

开集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$，$f: U\to V\subseteq\mathbb{R}^n$，$f$ 单、连续，则 f 为同胚.

等价地，$f:\overline{B(0,1)}\to\mathbb{R}^n$，$f$ 单、连续，则 $f(0)$ 为 $f(B)$ 内点.

反证：$f(0)$ 不是内点.

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists p\notin f(B),\ \|p-f(0)\|<\varepsilon.$

目标：构造 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足：

① $\|x-g\circ f(x)\|\le 1,\ \forall x\in B$

从而对 $1-g\circ f$ 用 Brouwer 不动点定理

$\Rightarrow \exists x_0,\ g\circ f(x_0)=0$

② $\|gf(x)\|>0,\ \forall x\in B$

$f^{-1}: f(B)\to B$ 连续延拓得 $h:\mathbb{R}^n\to B$，h 连续，$h|_{f(B)}=f^{-1}$

定义 $\pi:\mathbb{R}^n\setminus p\to\partial B(p,\varepsilon)$，将 $B(p,\varepsilon)$ 内部点推到两界.

取多项式 $\tilde{h}$ 逼近 h，考虑 $g=h\circ\pi:\mathbb{R}^n\setminus p\to B$

则：$h\circ\pi\circ f(x)=x,\ \forall x\in B$ 及 $\|f(x)-p\|\ge\varepsilon$.

$\Rightarrow \|g\circ f(x)-x\|<\frac{1}{2},\ \forall x\in B$ 及 $\|f(x)-p\|\ge\varepsilon$.

$h\circ\pi\circ f(x)\subseteq B(0,\frac{1}{2}),\ \forall x\in B$ 及 $\|f(x)-p\|\le\varepsilon$.

（取 ε 充分小，用 h 连续性）

进一步，$\tilde{h}\circ\pi\circ f(x)\neq 0,\ \forall x\in B$ 及 $\|f(x)-p\|\le\varepsilon$.

从而 g 满足所需，可导出矛盾！

· 有限表现群.

$G=\langle S\mid R\rangle \leftarrow F(S)=\langle S\mid -\rangle$

Thm: $\forall G, \exists X,\ \pi_1(X)=G$

Thm: (Marshall) $H<F_n$ 为有限生成，则 $H=\bigcap_{H\le K\le F_n} K$，$K$ 有限指数

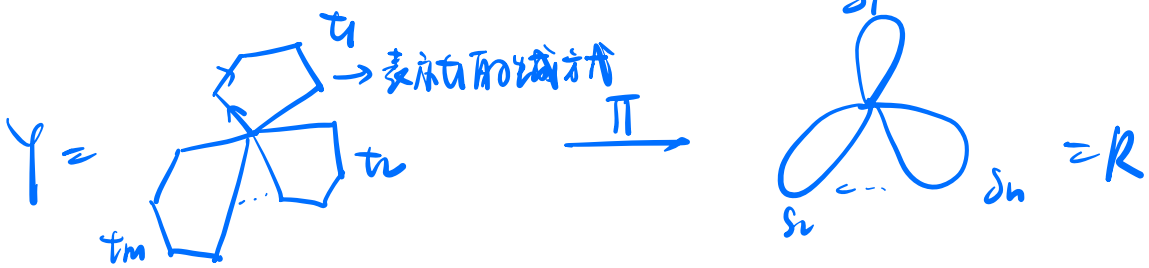
且 $\forall g\notin H,\ \exists K<F_n$，$K$ 有限指数，$g\notin K$.

用基本群及覆盖空间证这个定理

(1) 给出 H 的例画：

$H=\langle T\rangle$, $T=\{t_1,\cdots,t_m\}$, $F_n=F_n\langle s_1,\cdots,s_n\rangle$.

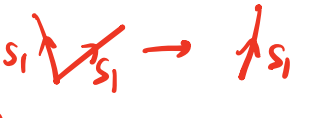
构造映射 π:



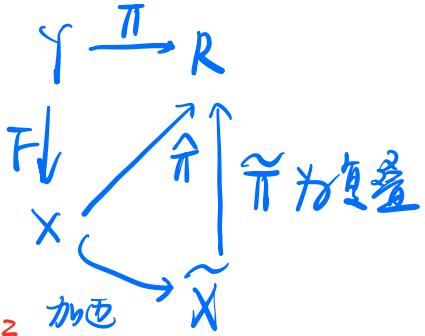
则：$H\cong \pi_*(\pi_1(Y))$

(2) 定理的证明：

把 π 用 folding 改造为局部单射.



进一步完善化为覆盖映射.



$\tilde{\pi}_*(\pi_1(X))=H$ folding 可能改变基本群.

$\tilde{\pi}_*(\pi_1(X))\supseteq H$

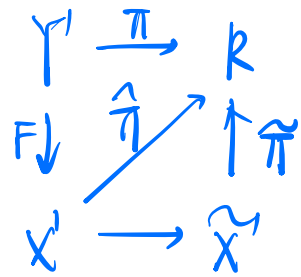
多方面，$g\notin H$ 时在折线 p，$p\xrightarrow{\pi} g=W$

考虑 $Y'=Y\cup\{$折线 $p\}$，

p 在 Y' 中不闭合 $\Rightarrow$ p 在 X'，$\tilde{X}'$ 中不闭合

则 $g\in \tilde{\pi}_*(\pi(\tilde{X}'))=K \Leftrightarrow p$ 为闭路.

$K=\pi_1(\tilde{X}')$ 即为所求.



$\tilde{X}'$ 为有限覆盖.