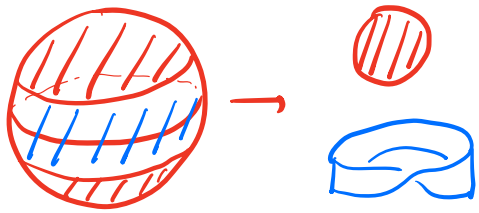
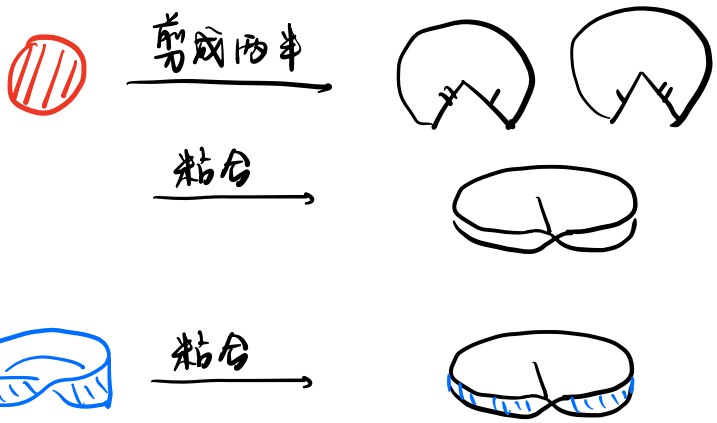
- 古典微分几何：$\mathbb{E}^3$ 中的曲线、曲面.
- 基本群和复叠空间.

作业20% + 期中40% + 期末40%

- 问题：射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中是什么样？

$\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{E}^2 \cup \{\text{无穷远}\} \cong S^2/\text{对径点}$ →





- 观察：(1) S^2 和 $\mathbb{RP}^2$ 不同胚 ⟶ 用复叠空间

(2) $\mathbb{RP}^2$ 无法不自交地嵌入 $\mathbb{R}^3$ ⟶ 用示性类.

- 古典微分几何：

局部的、外蕴的、有度量形状

{ 外蕴：几何对象嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中去研究
  内蕴：自身的性质

古典微分几何

一、预备知识

1. "正则"

· 定义：($\mathbb{R}^n$ 中 m 维、嵌入正则子流形)

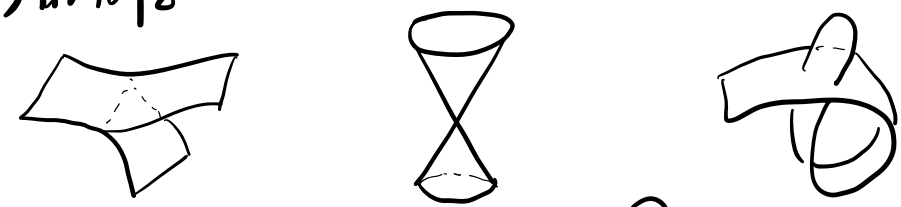
$M \subset \mathbb{R}^n$，$\forall p \in M$，$\exists$ 开邻域 $W = W(p) \subset \mathbb{R}^n$ 和开集 $U \subset \mathbb{R}^m$，

且 $\exists$ 光滑同胚 $\varphi: U \to M \cap W$，

使得 $d\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$ 处处非退化 (即：rank = m)

正则形式！

非流形的例子：



$n=3, m=1$：空间曲线　　e.g.



$n=3, m=2$：空间曲面

· 定义：(空间正则参数曲线段 / 曲面片)

(U, φ)，其中 $U \subset \mathbb{R}^m$ 开集，$\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ 光滑映射，使 $d\varphi$ 矩阵处处非退化

2. 向量微积分

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$，$\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$，$\int \vec{v}\,dt = \begin{pmatrix} \int x\,dt \\ \int y\,dt \\ \int z\,dt \end{pmatrix}$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

例：$\vec{v}$ 长度不变 $\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}=0$

$\vec{v}$ 方向不变 且 $\vec{v}(t)\neq 0, \forall t \Leftrightarrow \vec{v}'\times\vec{v}=\vec{0}$

$\vec{v}$ 与确定方向垂直 $\Leftrightarrow \vec{v}\cdot(\vec{v}'\times\vec{v}'')=0$

若 $\vec{v}'\times\vec{v}''\neq 0$，则：$(\vec{v}\times\vec{v}')'\times(\vec{v}\times\vec{v}')=\vec{0}$

$(\vec{v}\times\vec{v}'')\times(\vec{v}\times\vec{v}')$

2. 多元微积分

- 求偏导以后可交换 $\Leftrightarrow f\in C^2$ 或更高
- 只涉及第二型积分
- 复解析是比光滑更强的性质 （解析：满足C-R方程）

二、空间曲线论

$\gamma: J\to\mathbb{R}^3$ 正则参数曲线段，J 开区间

- 弧长：$Length_\gamma([a,b])=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$.

其中 $\|\cdot\|$ 欧氏，$\gamma'(t)=\frac{d\gamma}{dt}$，$\gamma': J\to V(E^3)$

- 命题：弧长是几何量.

即：若 $h:[\tilde{a},\tilde{b}]\to[a,b]$ 微分同胚（h 与 h^{-1} 均光滑），$\tilde{\gamma}(\tilde{t}):=\gamma(h(\tilde{t}))$，

则 $Length_{\tilde{\gamma}}([\tilde{a},\tilde{b}])=Length_\gamma([a,b])$

① 保向：$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\left\|\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}}\right\|d\tilde{t}=\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\Big|_{h(\tilde{t})}\cdot\frac{dh}{d\tilde{t}}\right\|d\tilde{t}$

$=\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|_{h(\tilde{t})}dh(\tilde{t})=\int_a^b\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|dt$ ✓

② 反向：同理 ✓

• 定义：若 $r(s)$ 满足 $\|r'(s)\|=1$，$\forall s\in J$，则称 s 为弧长参数

一般称 $r(t)$ 的 t 为正则参数.

• $\int_a^b \|r'(s)\|ds = b-a \Rightarrow ds$ 为不变量

$s(t)=\int_a^t \|r'(u)\|du \Rightarrow ds=\|r'(t)\|dt$

• 命题：$\forall$ 正则参数曲线 可(分段可微) 地换元为弧长参数

即：t 作为弧长 s 的函数导数处处非 0

$t=t(s) \Rightarrow 1=\|\frac{dr(t(s))}{ds}\|=\|\frac{dr(t)}{dt}\|\cdot\frac{dt}{ds} \Rightarrow \frac{dt}{ds}\neq 0$

• 曲率：r 取弧长参数 s，r 在 s 处曲率 $\text{Curvature}_r(s)=\|r''(s)\|$

例：直线的曲率 $=0$

半径 R 的圆弧曲率 $=\frac{1}{R}$　$r=(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R})$

注1：$\frac{1}{\text{Curvature}}$ 称为 s 处密切圆半径. osculating circle

注2：对正则参数 t，$\text{Curvature}(t)=\frac{\|r''(t)\times r'(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$

$r'(t)=r'(s)\cdot s'(t)=r'(s)\cdot\|r'(t)\|$　　$\|r'(s)\|=1 \Rightarrow r'(s)\cdot r''(s)=0$

$r''(t)=r''(s)\cdot\|r'(t)\|^2+r'(s)\cdot\frac{d\|r'(t)\|}{dt}$　　将 $r'(t), r''(t)$ 用 $r'(s), r''(s)$ 表示

$\Rightarrow \|r''(t)\times r'(t)\|=\|r'(t)\|^3\cdot\|r'(s)\|\cdot\|r''(s)\|=\|r'(t)\|^3\cdot\|r''(s)\|$ ✓

注3：对平面曲线 $(x(t), y(t))$，$\text{Curvature}(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

• 例：平面椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$P=(x_0, y_0)\in$ 处曲率？

正则参数：$(x(t), y(t))=(a\cos t, b\sin t)$

$\Rightarrow (x', y')=(-a\sin t, b\cos t)=(-\frac{ay}{b}, \frac{bx}{a})$

$\Rightarrow (x'', y'')=(-x, -y)$

$\Rightarrow$ Curvature $= \frac{ab}{(\text{分母})^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(x_0,y_0)}$ (用注3的公式)

特别地, $(a,0)$: $curv = \frac{a}{b^2}$

$(0,b)$: $curv = \frac{b}{a^2}$

- 定义: 弧长参数且$\|r''\| \neq 0$时, $\vec{n} = \frac{r''}{\|r''\|}$ 称为法向量, r''称为曲率向量.

- 挠率: 弧长参数s且$\|r''\| \neq 0$时, s处挠率 $Torsion_\gamma(s) := -\vec{b}'(s)\cdot\vec{n}(s)$

  其中: $\vec{n}(s) = \frac{r''}{\|r''\|}$, $\vec{b}(s) = r'(s) \times \vec{n}(s)$, $curv \neq 0$

  注1: $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$, 其中 $\vec{t}(s) = r'(s)$

  $\Rightarrow \vec{b}' = \vec{t}' \times \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n}' = \vec{t} \times \vec{n}' \ // \ \vec{n}$

  $\Rightarrow \|Torsion_\gamma(s)\| = \|\vec{b}'(s)\|$

  注2: "-"保证 挠率>0时 前进方向 密切平面 绕$\vec{t}$逆时针转.

  注3: 反向时, 挠率绝对不变.

  注4: 正则参数: $Torsion_\gamma(t) = \frac{(r' \times r'') \cdot r'''}{\|r' \times r''\|^2}$

- 定义: $\vec{t}$: 法平面

  $\vec{n}$: 从切平面

  $\vec{b}$: 密切平面

  右手单位正交标架

  $\gamma(s)$处 $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ 称为此处的 Frenet标架.

- Frenet公式: $(\vec{t}', \vec{n}', \vec{b}') = (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

例：$\gamma(s)$ 为球面曲线，$k(s)>0$，则：$\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right)^2=\text{const}$

球心 O，$\vec{v}(s)=\gamma(s)-O \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}=0$ （即 $\vec{v}'=\vec{t}$）

$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{t}=0$

$\Rightarrow \vec{v}'\cdot\vec{t}+\vec{v}\cdot\vec{t}'=\vec{t}\cdot\vec{t}+k\vec{v}\cdot\vec{n}=0$

$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{n}=\frac{1}{k}$

用 Frenet 公式可证：$\vec{v}\cdot\vec{b}=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'$

$\Rightarrow \|\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\cdot\vec{n}\|^2+\|\vec{v}\cdot\vec{t}\|^2+\|\vec{v}\cdot\vec{b}\|^2=\text{const}$ ✓

注：反之一般不成立.

反例：$k>0$ 为常数时上升成立 e.g. 柱面螺旋线

- 命题：若 $k,\tau>0$（且光滑），则满足 $\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right)^2=\text{const}$ 的曲线要么是球面曲线，要么是常曲率曲线.

- 曲线论基本定理：

$k(s),\tau(s)$：$J\to\mathbb{R}$ 光滑，J 开区间且处处 $k(s)>0$

则 $\exists\,\gamma:J\to\mathbb{E}^3$，以 k 为参数，使曲率 $=k$，挠率 $=\tau$.

若 $\tilde{\gamma}:J\to\mathbb{E}^3$ 也满足，则 $\exists$ 刚体运动 $\sigma:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$，$\tilde{\gamma}=\sigma\circ\gamma$

(k,τ) 可惟一决定一条空间曲线（至多差一个陪起）

证明的核心是一个 ODE 初值问题.

断言：设 $H=\begin{pmatrix}0&-k&0\\k&0&-\tau\\0&\tau&0\end{pmatrix}:J\to M_{3\times3}(\mathbb{R})$，任给 $F_0\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$，

则 ODE 初值问题 $F'(s)=F(s)\cdot H(s)$，$F(0)=F_0$

$\exists$ 惟一光滑解 $F:J\to M_{3\times3}(\mathbb{R})$

且：若 $F(0)\in SO(3)$，则 $F(s)\in SO(3),\ \forall s\in J$

定理存在性说明：

存在性：由断言：$\exists F: J\to SO(3)$，任取 $r_0\in\mathbb{E}^3$，设 $F=(\vec{e},\vec{n},\vec{t})$

构造 $r(s)=r_0+\int_{s_0}^{s}\vec{t}(x)\,dx$

只需验证 $r(s)$ 满足条件，由断言保证 ✓

唯一性：若 $\tilde{r}$ 如所设，则 $\tilde{r}(s_0)=r_0$，$\tilde{r}$ 在 s_0 的 Frenet 标架 $\tilde{F}_0$

记 $G: r_0\mapsto \tilde{r}_0$，$G_*: F_0\mapsto \tilde{F}_0$

则 G 验证符合要求

断言存在说明：（所谓性、变系数、齐次 ODE 初值问题）

(1) 关于 $SO(3)$ 的断言：只需证：$F(s)\cdot F^T(s)=I$

$(FF^T)'=F'F^T+F(F')^T=FHF^T+FH^TF^T=0$

即 $FF^T|_{s=0}=F_0F_0^T=I\ \Rightarrow F(s)\in SO(3)$

用到：H 反对称

注：$SO(n)$ 是 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维子空间。

$F'=FH$，$F_0\in SO(3)$ 时 $F\in SO_3$

$\Rightarrow$ 切向量 F' 与 $SO(3)$ 空间垂直。

I 处有 $SO(n)$ 中切空间 $so(n)=T_I SO(n)=\{X: X=-X^T\}$

I 处为例：$(I+tX)(I+tX)^T=I\iff t(X+X^T)+t^2XX^T=0$

对上式关于 t 求导且令 $t\to 0\Rightarrow X+X^T=0$

* $F=F_0e^{\int H}$ 有意义但并非一个解（一般是谱解）

(1) $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，$e^A:=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$

(2) 范数 $\|A\|:=n\cdot\max\{|a_{ij}|\}$，

则：$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$，$\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

注意到 $AB\neq BA$（一般而言），故 $e^{A+B}\neq e^A\cdot e^B$

(2) 用逐次逼近法构造正确解：

$F_0(s) = F_0$

$F_1(s) = F_0 + \int_{s_0}^{s} F_0(u)H(u)\,du$

$F_n(s) = F_0 + \int_{s_0}^{s} F_{n-1}(u)H(u)\,du$

$\|F_1 - F_0\| \le \int_{s_0}^{s} \|F_0(u)\| \cdot \|H(u)\|\,du$ 保留 s 才可以积分

记 $M = \max_{[s_0-\delta, s_0+\delta]} \|H(u)\|$, 则 $\|F_1 - F_0\| \le M \cdot \|F_0\| \cdot |s-s_0|$

$\Rightarrow \|F_2(s) - F_1(s)\| \le \int_{s_0}^{s} M \cdot \|F_0\| \cdot |u-s_0| \cdot M\,du = M^2 \cdot \|F_0\| \frac{|s-s_0|^2}{2}$

$\Rightarrow$ 类似有: $\|F_{n+1}(s) - F_n(s)\| \le M^{n+1} \cdot \|F_0\| \cdot \frac{|s-s_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

对 $\{F_n(s)\}$ 收敛, $\forall s \in [s_0-\delta, s_0+\delta]$

记 $F_\infty(s) := \lim_{n\to\infty} F_n(s)$

以下验证:

① $F(s) = F_\infty(s)$ 在 $[s_0-\delta\ s_0+\delta]$ 光滑.

② $F' = FH$ (解局部存在)

③ 解局部唯一

④ 解存在唯一延拓到整个区间 J

①: 先验证 $F'_\infty(s) = \lim F_n(s)H(s) = F_\infty(s)H(s)$ 用到 $F_n(s)H(s) \rightrightarrows F_\infty(s)H(s)$

②: 由① 即得

③: 只需验证: $F_0 = 0$ 时, $F \equiv 0$ 是唯一解, 代入即得.

④: J 为区间, 且在紧区间上均可得到唯一局部解.

讨论: (1) $F' = FH$, $F(s_0) = F_0$.

当 $H \in C^0 \Rightarrow F \in C^1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow F \in C^\infty$

(2) 定理加证明只说明存在性, 得不到曲线表示.

例：（平面曲线） $\tau=0 \Rightarrow H=\begin{pmatrix}0 & -\kappa & 0\\ \kappa & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

此时用 $F_0 e^{\int H}$ 求解就成立！

$$F(s)=F_0\cdot\begin{pmatrix}\cos\int_{s_0}^{s}\kappa & -\sin\int_{s_0}^{s}\kappa & 0\\ \sin\int_{s_0}^{s}\kappa & \cos\int_{s_0}^{s}\kappa & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\gamma(s)=\gamma(s_0)+\int_{s_0}^{s}\vec{t}(u)\,du$$

- 关于曲线在某点附近的标准展开：

$$\gamma(s)\sim\gamma(0)+\gamma'(0)s+\frac{\gamma''(0)}{2!}s^2+\cdots \quad (\text{实解析时 "}\sim\text{" 改为 "}=\text{"})$$

其中 $\gamma'(0)=\vec{t}(0)$，$\gamma''(0)=\kappa\vec{n}(0)$，

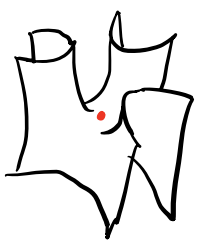
$$\gamma'''(0)=-\kappa^2\vec{t}(0)+\kappa'\vec{n}(0)+\kappa\tau\vec{b}(0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x(s)=x(0)+s-\frac{\kappa^2(0)}{6}s^3+o(s^3)\\ y(s)=y(0)+\frac{\kappa(0)}{2}s^2+\frac{\kappa'(0)}{6}s^3+o(s^3)\\ z(s)=z(0)+\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3+o(s^3)\end{cases}$$

三. 空间曲面论

例：$z=x^3-3xy^2$

$(x,y,z)=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \rho^3\cos 3\theta)$



猴鞍面S

问：猴鞍面S是否为 $\mathbb{E}^3$ 的正则子流形？

答：是. 猴鞍点处为极坐标系，非正则坐标系！

$\phi:(s,t)\mapsto(s,t,\ s^3-3st^2)$

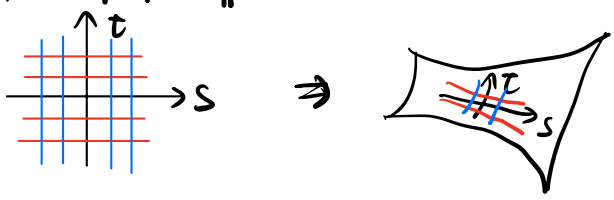
检查 $(0,0)$ 处：$\frac{\partial\phi}{\partial s}=(1,0,3s^2-3t^2)$

$\frac{\partial\phi}{\partial t}=(0,1,-6st)$ } 张成2维空间.

$\Rightarrow (0,0)$ 处 Jacobi 矩阵秩为2 $\Rightarrow$ 此为正则坐标！

· 参数曲面：连续映射 $S: D \to \mathbb{E}^3$，其中 $D \subseteq \mathbb{R}^2$

· 坐标曲线：s曲线，t曲线



→ 曲线坐标.

· 弧长：$\gamma: [a,b] \to \mathbb{E}^3$，$\gamma(r) = \phi(s(r), t(r))$

$$\text{Length}_\gamma = \int_a^b \left(\phi_s(s(r),t(r))\cdot s'(r) + \phi_t(s(r),t(r))\,t'(r)\right) dr$$

· 夹角：$\cos\theta = \dfrac{|\phi'\cdot\psi'|}{|\phi'|\cdot|\psi'|}$

· 面积：$\text{Area}_R = \iint_R \|\phi_s(s,t)\times\phi_t(s,t)\|\, ds\,dt$，R有界闭区域，$\partial R$正则

· 曲面片 $\phi: U \to \mathbb{E}^3$，参数 (s,t)

$\phi_s, \phi_t: U \to V(\mathbb{E}^3) \cong \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} E = \phi_s\cdot\phi_s \\ F = \phi_s\cdot\phi_t = \phi_t\cdot\phi_s \\ G = \phi_t\cdot\phi_t \end{cases}$$

$E, F, G: U \to \mathbb{R}$ 称为第一类基本量

动长上，$g = E\,ds^2 + 2F\,ds\,dt + G\,dt^2$

可借 $\sqrt{g}$ 称作无穷小线元长度：$\text{Length}_\gamma = \int_{c(s_0,t_0)}^{(s,t)} \sqrt{g}$

⇒ 无穷小面元面积：$|\det(g)| = \sqrt{EG-F^2}\,ds\,dt$

g称为第一基本动长.

例：鞍形曲面：$\begin{cases} E = 1+9(s^2-t^2)^2 \\ F = -18(s^2-t^2)st \\ G = 1+36s^2t^2 \end{cases}$

观察：$s=0$ 或 $t=0$ 时，$F=0$ ⇒ s-曲线和t-曲线在此处正交.

原点附近：$g = ds^2+dt^2+o(|s|^2+|t|^2) \approx ds^2+dt^2$

• 参数替换：$(s,t) = (s(\tilde{s},\tilde{t}),\ t(\tilde{s},\tilde{t}))$

$\Rightarrow \tilde{E} = \tilde{E}(\tilde{s},\tilde{t})$，$\tilde{F}$，$\tilde{G}$ 类似.

记 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial \tilde{s}} & \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial t}{\partial \tilde{s}} & \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot J^T$

例：旋转面 $(s,t) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$

$\Rightarrow I = (1+9\rho^4\cos^2(3\theta))\,d\rho^2 - 18\rho^5\cos 3\theta\sin 3\theta\, d\rho d\theta + (1+9\rho^4\sin^2(3\theta))\,d\theta^2$

算法一：直接算 $\tilde{E}$，$\tilde{F}$

算法二：$I = (ds\ dt)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix}$

$= (d\tilde{s}\ d\tilde{t})\, J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} d\tilde{s} \\ d\tilde{t} \end{pmatrix}$

$= (d\tilde{s}\ d\tilde{t})\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\tilde{s} \\ d\tilde{t} \end{pmatrix} = \tilde{I}$

$\Rightarrow$ 第一基本形式比单个基本量在参数替换下不变性更好！

例：球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$，求 S 的第一基本形式.

$$\begin{cases} 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \end{cases}$$

$\phi(x,y) = (x, y, z(x,y))$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_x = (1, 0, -\frac{x}{z}) \\ \phi_y = (0, 1, -\frac{y}{z}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = 1 + \frac{x^2}{z^2} \\ F = \frac{xy}{z^2} \\ G = 1 + \frac{y^2}{z^2} \end{cases} \Rightarrow I = (1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2})\,dx^2 + \frac{2xy}{1-x^2-y^2}\,dx\,dy + (1+\frac{y^2}{1-x^2-y^2})\,dy^2$

- 关于线性代数：

$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_n}\}$

$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_n^*\}$

其中 $\varepsilon_j^*(\vec{\varepsilon_i}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

$V^* \otimes V^* = \{ f : V \times V \to \mathbb{R} \mid f \text{ 为 } \mathbb{R}\text{-双线性函数} \}$

为 $\mathbb{R}$ 上 n^2 维线性空间

基底：$\varepsilon_k^* \otimes \varepsilon_l^*$，其中 $\varepsilon_k^* \otimes \varepsilon_l^*(u, v) = \varepsilon_k^*(u) \cdot \varepsilon_l^*(v)$

$\mathrm{Sym}^2(V) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\varepsilon_k^* \otimes \varepsilon_l^* + \varepsilon_l^* \otimes \varepsilon_k^*\}$ 由 $V \times V \to \mathbb{R}$ 的对称 $\mathbb{R}$-双线性函数构成，为 $\mathbb{R}$ 上 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间

⇒ 矩阵上：$B^T = B$

注：对一般的 $\varphi, \psi \in V^*$，$\varphi \otimes \psi \neq \pm \psi \otimes \varphi$.

$V^* \otimes V^*$ 的元一般不总形如 $\varphi \otimes \psi$，而是 $\sum \lambda_i \varphi_i \otimes \psi_i$

- 每个对称 $\mathbb{R}$-双线性函数 b 决定一个 V 上二次型：

$X \mapsto X^T B X$

$Q_b : V \to \mathbb{R}$ 满足 $Q_b(u) = b(u, u)$

反之，$\forall Q$ 可解出唯一的 b：

$b(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v))$

注记：char 下 $\neq 2$ 时，对称二次配对与二次型相互决定.

- 第一基本形式的现代看法：

给定 $\varphi : U \to \mathbb{E}^3$，$\varphi$ 单射，

切空间 $T_{\varphi(U)}(\varphi(U)) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_s(U), \varphi_t(U)\} \subseteq T_{\varphi(U)}\mathbb{E}^3 \cong V(\mathbb{E}^3) \cong \mathbb{R}^3$

$V(E^3)$ 中点乘诱导 $T_{\phi(u)}(\phi(U))$ 上的一个正定、对称、双线性配对，即内积

第一基本形式：$V := T_{\phi(u)}(\phi(U))$

$g: V \times V \to \mathbb{R}$ 内积

使 $(\phi_s, \phi_s) \mapsto \phi_s \cdot \phi_t = E$

$(\phi_s, \phi_t) \mapsto \phi_s \cdot \phi_t = F$

$(\phi_t, \phi_t) \mapsto \phi_t \cdot \phi_t = G$

即：g 的矩阵为 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

把 g 等同地看作 V 上的正定二次型时，

写成 $g = E ds^2 + 2F ds dt + G dt^2$ 切平面上内积

其中 $ds^2, ds dt, dt^2$ 被视作如下二次型

线性泛函

(1) ds, dt 被视为 V^* 中的元素，且构成 ϕ_s, ϕ_t 的对偶基底

使得 $(ds)(\phi_s) = 1$，$(ds)(\phi_t) = 0$

$(dt)(\phi_s) = 0$，$(dt)(\phi_t) = 1$

(2) $ds^2, ds dt, dt^2$ 视为相应得到的二次单次齐函数 $V \to \mathbb{R}$

$ds^2(v) = ((ds)(v))^2$

$ds dt(v) = ((ds)(v)) \cdot ((dt)(v))$

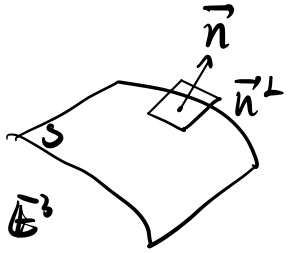
注：记号和区分：$ds \otimes dt$

$ds\, dt = dt\, ds = \frac{1}{2}(ds \otimes dt + dt \otimes ds)$

$ds \wedge dt = -dt \wedge ds = ds \otimes dt - dt \otimes ds$

· 第一基本形式：$V(E^3)$ 的内积在 $\vec{n}^\perp$ 的限制所给的内积

→ 对 $\phi(S)$ 相应的二次型



形如 $E\,ds^2 + 2F\,ds\,dt + G\,dt^2$

→ E, F, G 依赖于 s,t.

· 切向量就是方向导数 可内蕴地定义切向量、切平面、切空间

S 中，$\vec{v} \perp \vec{n}$ 从 P 发出

→ 给出一个 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$，$\gamma(0) = p$，$\gamma'(0) = \vec{v}$

→ $\forall f \in C^\infty(S)$，$f$ 在 p 点关于 $\vec{v}$ 的方向导数

$D_{\vec{v}}(f) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\gamma(s))$

ϕ_*：方向导数 → 切向量 $\begin{cases} \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\big|_{(s_0,t_0)}\right) = \phi_s|_{\phi(s_0,t_0)} \\ \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\big|_{(s_0,t_0)}\right) = \phi_t|_{\phi(s_0,t_0)} \end{cases}$

(微分流形中特点)

例：(s,t) 局部正则参数，则 (s_0,t_0) 处关于 ϕ_s 的方向导数就是 $\frac{\partial}{\partial s}$

ϕ_t 的方向导数就是 $\frac{\partial}{\partial t}$

一般地 $D_{\vec{v}}$ 总可写作 $\left(a\frac{\partial}{\partial s} + b\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(s_0,t_0)}$

对应 $\vec{v} = a\phi_s + b\phi_t$

· 总结：参数系 (s,t) (通用中)

→ 标架场 $\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ $\left(\phi_s = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),\ \phi_t = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)$

注：以参数系导出的标架场称为自然标架场

以偏导数记号 $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$ 只关于选定参数系有定义

例：$x = \tilde{x}$，$y = \tilde{x} + \tilde{y}$ 与参数系中所有或共有关.

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

· 定义：$\Phi:(s,t)$ 称为**等温参数系**，

若第一基本形式 $Eds^2+2Fdsdt+Gdt^2=\lambda\cdot(ds^2+dt^2)$ 保角

$\lambda=\lambda(s,t)$

· 命题：正则曲面每点局部都有等温参数系.

· 命题：正交标架场 Φ 正交参数系 Φ 等温参数系

$\Rightarrow$ ✗ 会积不出来　　$\Leftrightarrow$ ✓ $F=0$　　$\Leftrightarrow$ $F=0,\ E=G$

例：考虑 xy 平面的上半平面.

$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$ 为正交标架场

若 $\exists(s,t)$，$x=x(s,t)$，$y=y(s,t)$，使 $\begin{pmatrix}x_s\\y_s\end{pmatrix}=\alpha$，$\begin{pmatrix}x_t\\y_t\end{pmatrix}=\beta$

$\Rightarrow x(s)=s+C$

$\Rightarrow y_{st}=0,\quad y_{ts}=1$

$\Rightarrow y_{st}\neq y_{ts}$ $\Rightarrow$ 矛盾！ 故不存在.

· 第二基本形式：$\Phi:U\to E^3$，$u=u(s,t)\in U$

单位法向量：$\vec{n}=\dfrac{\Phi_s\times\Phi_t}{\|\Phi_s\times\Phi_t\|}$，$\vec{n}=\vec{n}(u)$

$$h=Lds^2+2Mdsdt+Ndt^2$$

其中 $L(u)=\Phi_{ss}(u)\cdot\vec{n}(u)\overset{\Delta}{=}-\Phi_s\cdot\vec{n}_s$　对 $\Phi_s\cdot\vec{n}=\Phi_t\cdot\vec{n}=0$ 求导

$M(u)=\Phi_{st}(u)\cdot\vec{n}(u)\overset{\Delta}{=}-\Phi_s\cdot\vec{n}_t=-\Phi_t\cdot\vec{n}_s$

$N(u)=\Phi_{tt}(u)\cdot\vec{n}(u)\overset{\Delta}{=}-\Phi_t\cdot\vec{n}_t$

· 考虑中沿 $\vec{n}$ 的位移变化：泰勒公式

$$(\Phi(u+\delta u)-\Phi(u))\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}(\Phi_{ss}(u)\cdot ds^2+2\Phi_{st}(u)\,ds\,dt+\Phi_{tt}(u)\,dt^2)\cdot\vec{n}$$

· 参数替换 $(s,t)=(s(\tilde{s},\tilde{t}),t(\tilde{s},\tilde{t}))$，记 $J=\begin{pmatrix}\frac{\partial s}{\partial\tilde{s}} & \frac{\partial t}{\partial\tilde{s}}\\ \frac{\partial s}{\partial\tilde{t}} & \frac{\partial t}{\partial\tilde{t}}\end{pmatrix}$

保向时，$\det J>0$，$\begin{pmatrix}\tilde{L} & \tilde{M}\\ \tilde{M} & \tilde{N}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}J^T$

变向时，$\det J<0$ $\begin{pmatrix}\tilde{L} & \tilde{M}\\ \tilde{M} & \tilde{N}\end{pmatrix}=-J\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}J^T$

第一基本形式和参数替换与方向无关；第二基本形式与方向无关

$$(\Phi_{\tilde{s}}\ \Phi_{\tilde{t}})=(\Phi_s\ \Phi_t)J^T$$

$$\Rightarrow \Phi_{\tilde{s}}\times\Phi_{\tilde{t}}=\det J\cdot\Phi_s\times\Phi_t$$

$$\Rightarrow \vec{\tilde{n}}=\operatorname{sgn}(\det J)\,\vec{n}$$

$$\Rightarrow(\tilde{n}_{\tilde{s}}\ \tilde{n}_{\tilde{t}})=\operatorname{sgn}(\det J)\cdot(n_s\ n_t)J^T$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\tilde{L} & \tilde{M}\\ \tilde{M} & \tilde{N}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\Phi_{\tilde{s}}\\ \Phi_{\tilde{t}}\end{pmatrix}(\tilde{n}_{\tilde{s}}\ \tilde{n}_{\tilde{t}})=-J\begin{pmatrix}\Phi_s\\ \Phi_t\end{pmatrix}(n_s\ n_t)J^T\operatorname{sgn}(\det J)$$

$$=J\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}J^T\cdot\operatorname{sgn}(\det J)$$

· 定义：$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$ 称为平均曲率

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 称为 Gauss 曲率

$H,K:U\to\mathbb{R}$

例：若 $\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$H(u)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$，$K(u)=\det\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$

· 命题：K是参数代换下不变量"n向量"

H是参数代换保向时不变，反向时反号"保向n向量"

注：通常 K.H 可正可负.

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$，其中 $EG-F^2>0$.

$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\right)$

$K = \det\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\right)$

而 $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}J^T$

$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}J^T \operatorname{sgn}(\det J)$

$\Rightarrow \tilde{H}(\tilde{u}) = H(u(\tilde{u}))\cdot \operatorname{sgn}(\det J)$ 在连通开集 U 上为常数

$\tilde{K}(\tilde{u}) = K(u(\tilde{u}))$

· 问题：H, K 反映着曲面的什么性质？



回答：每点可用二次曲面近似

根据二次曲面的分类，通常有两个弯曲"最厉害"的方向.

这两个方向的（如图）法截线曲率（带符号）乘积为 K，算术平均为 H.

想法：1. 分析曲面上的曲线



2. 关心局部的情况

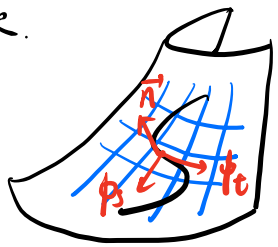
3. 曲线的各种弯曲不仅仅取决于曲面和曲线的切方向

4. 分离出法向和测地两种成分 $K = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$

· 曲面上曲线的弯曲：

$\Phi: U \to E^3$，$\gamma: J \to E^3$，$\gamma(t) = \Phi(u(t)) = \Phi(s(t), t(t))$，t 为弧长参数

考虑 $K(r) = \text{Curvature}_\gamma(r)$ 与曲面基本量的联系.



$K(r) = \|\gamma''(r)\|$

注意到: $\gamma'' \perp \gamma'$, $\vec{n} \perp \gamma'$

$\Rightarrow$ 可分解: $\gamma'' = K_n \cdot \vec{n} + K_g \cdot \vec{n} \times \gamma'$

称 K_n, K_g 分别为 γ 关于 ϕ 的 法曲率 (normal) 和 测地曲率 (geodesic).

注: K_n, K_g 可正可负.

K_n 只与 $\vec{n}$ 有关; K_g 与 $\vec{n}$, γ' 有关

弧长参数时, $K_n = \gamma'' \cdot \vec{n} = \frac{d^2\phi}{dr^2} \cdot \vec{n}$

$$= L(s')^2 + 2M s't' + N(t')^2$$

即: $K_n = (s'\ t') \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow K_g = \pm\sqrt{K^2 - K_n^2}$

一般参数时, $\gamma = \gamma(\tilde{r})$, $\tilde{r}$ 为弧长参数

$\Rightarrow K_n = \left(L\left(\frac{ds}{d\tilde{r}}\right)^2 + 2M\frac{ds}{d\tilde{r}}\cdot\frac{dt}{d\tilde{r}} + N\left(\frac{dt}{d\tilde{r}}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2$

向 $\tilde{r}$ 为弧长参数 $\Rightarrow 1 = \|\gamma'(\tilde{r})\| = \|\phi_s \cdot s' + \phi_t \cdot t'\|$

$$= \phi_s\phi_s\left(\frac{ds}{d\tilde{r}}\right)^2 + \phi_s\cdot\phi_t\frac{ds}{d\tilde{r}}\frac{dt}{d\tilde{r}} + \phi_t\cdot\phi_t\left(\frac{dt}{d\tilde{r}}\right)^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{ds}{d\tilde{r}}\right)^2 + 2F\frac{ds}{d\tilde{r}}\frac{dt}{d\tilde{r}} + G\left(\frac{dt}{d\tilde{r}}\right)^2 = 1$$

代入 $\Rightarrow K_n = \frac{Ls'^2 + 2Ms't' + Nt'^2}{Es'^2 + 2Fs't' + Gt'^2}$

注: (1) 曲面片反向, K_n 反号

曲面片和曲线恰只有一个反向时, K_g 反号

(2) 设 γ'' 与 $\vec{n}$ 夹角为 $\theta \in [0, \pi]$

则: $\begin{cases} K_n = K\cos\theta \\ K_g = \pm K\sin\theta \end{cases}$

记：若 γ 的次法向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角为 $\varphi \in [0,\pi]$，

则 $k_g = k\cos\varphi$

$k_g = \gamma'' \cdot (\vec{n}\times\vec{\gamma}') = \vec{n}\cdot(\vec{\gamma}'\times\vec{\gamma}'')$ → 次法向量的方向

$= k\cdot\vec{n}\cdot\vec{b} = k\cos\varphi$

例：（圆柱螺线）

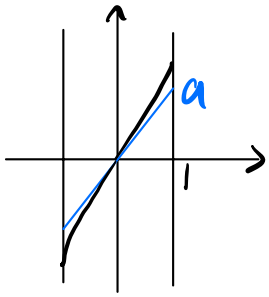
$S: x^2+y^2=1$，$\gamma(r) = (\cos r, \sin r, ar)$

$\gamma'' = (-\cos r, -\sin r, 0)$　（r 不是弧长参数）

$k = \frac{1}{1+a^2}$

注意 $\gamma'' \perp S$，由 S 外指法向

$\Rightarrow k_n = -k = -\frac{1}{1+a^2}$，$k_g = 0$



注：(1) 由旋进时标：k_n, k_g 为常数.

由中心旋转时标：$\gamma'' \parallel \vec{n}$

进一步：k_n 与截出相有同的 k_n 一样.

半短轴 1，半长轴 $\sqrt{a^2+1}$ $\Rightarrow k_n = \frac{1}{1+a^2}$ $\Rightarrow k_g = 0$

(2) $k_g = 0$ 意味着 γ 是 S 上的测地线.

内蕴的、局部路程最短线

· 定义：曲面 S 上曲线 γ

(1) 测地线：$k_g \equiv 0$

(2) 法截线：过曲面任何一点的法线的任一平面与 S 的交线.

平面曲线　（在给定点的充分小邻域内，

除曲率定理除法法截线为正则曲线）

性质：法截线在给定点处 $K_g=0$，$K_n=K$

- 用法截线理解 K, H：

  考虑 $\Phi: U\to \mathbb{E}^3$，在 $u_0=(s_0,t_0)$ 处，切向量：$a\Phi_s+b\Phi_t|_{u=u_0}$

  对应法截线在 (s_0,t_0) 处曲率 $K=K_n=\dfrac{La^2+2Mab+Nb^2}{Ea^2+2Fab+Gb^2}$

  (1) 可定义 主曲率、主方向（类似二次型：特征值、特征向量）

  两特征值不等时，主方向为 K 取最小值、最大值的方向.

  (2) 考虑求 K 在 P 点不同切向的最值.

  $\Leftrightarrow$ 固定 $Ea^2+2Fab+Gb^2=1$，求 $La^2+2Mab+Nb^2$ 的最值.

  $\Leftrightarrow$ 考虑 Φ_s,Φ_t 为 u_0 处单位正交标架，即：$\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}|_{u_0}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

  求 $(a\ b)\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 的最值.

  转化为标准型 $(\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\\tilde\beta\end{pmatrix}$

  $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，单位正交的特征向量 $\gamma_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$

  K 分别在 γ_1,γ_2 取到最值 λ_1,λ_2.

  向 $\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}|_{u_0}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 时，$H=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$，$K=\lambda_1\lambda_2$

  (3) 主方向和主曲率：$\Phi: U\to\mathbb{E}^3$ 在任一点 $u_0=(s_0,t_0)$ 处

  $\lambda^2-2H(u_0)\lambda+K(u_0)=0$ 称为 特征方程.

  特征根 λ_1,λ_2 确定的 $\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ 的特征向量称为 主方向

  与参数有关，但主方向是几何量

  $\Rightarrow$ 希望转化为与参数无关的量.

- 高斯映射：(U,Φ) 如上，$G: U\to S^2$

  $u\mapsto \vec n(u)$

  可视为等同的

  中 U 处切平面 $\leftrightarrow$ S^2 上 U 处切平面

  G 和切映射可描绘出 Φ 的弯曲有关和：$\vec n(u)^{\perp}\xrightarrow{dG}\vec n(u)^{\perp}$

- Weingarten 映射：线性自同构 $-g_*$，即：$W: \vec{n}(u)^\perp \to \vec{n}(u)^\perp$

$$\vec{v} \mapsto -\frac{d(G\circ\gamma)}{dr}\Big|_{r=0}$$

取 $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{E}^3$，$\gamma(r) = \phi(u(r))$，

$\gamma(0) = \phi(u)$，$\gamma'(0) = \vec{v}$

- 命题：在 $\vec{n}(u)^\perp$ 的基底 ϕ_s, ϕ_t 上，W 的矩阵为 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

设 W 的矩阵为 A，即：$W(\phi_s, \phi_t) = (\phi_s\ \phi_t)A$

$W(\phi_s, \phi_t) = (W(\phi_s), W(\phi_t))$ 对应于 $\gamma(r) = \phi(r, 0)$

$= (-\vec{n}_s, -\vec{n}_t)$ 相当于二阶导

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_s \\ \phi_t \end{pmatrix} W(\phi_s, \phi_t) = \begin{pmatrix} \phi_s \\ \phi_t \end{pmatrix}(\phi_s\ \phi_t)A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}A$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

注：W 是一个与保面参数选取无关的线性映射.

$\Rightarrow H, K$ 为一种几何刻画：$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}W$，$K = \det W$

- 定义：W 相应于特征值的（任何）特征线向 特征向量张成的 1 维空间.

称为 (U, ϕ) 在 U 的（相应于特征值的）一个主方向.

它是 $\vec{n}(u)^\perp$ 的 1-维空间.

注：(1) $k_1 = k_2$：所有方向为主方向. W 为数量阵.

$k_1 \neq k_2$：恰有二个主方向.

(2) k_1, k_2 总为实数. W 总能对角化.

取 $\vec{n}(u)^\perp$ 的任何单位正交基底 (e_1, e_2).

设 $(e_1\ e_2) = (\phi_s\ \phi_t)K$

$\Rightarrow \quad I = R^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} R$

而 $W(e_1, e_2) = W(\phi_s, \phi_t) R = (\phi_s, \phi_t) AR = (e_1, e_2) R^{-1} AR$

$\Rightarrow$ W 在 (e_1, e_2) 上矩阵 $R^{-1} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} R = R^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} R$ 对称

(3) 若进一步作正交基底变换：

$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) P = (\phi_s, \phi_t) RP = (\phi_{\tilde{s}}, \phi_{\tilde{t}}) \tilde{R}$

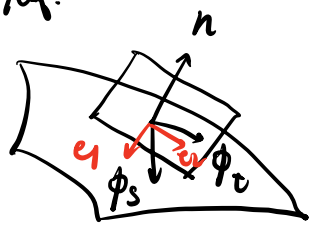
可使 $\tilde{R}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tilde{R} = I$

$\tilde{R}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tilde{R} = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix}$ 相当于做对角化.

$\Rightarrow$ 关于 $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ 第二基本形式矩阵是 $\begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix}$

$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ 是关于第一基本形式和单位正交基底.

(4) 另一种看法：(Dupin 标准型)



以 $\Phi(U)$ 为原点，$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, n)$ 为新坐标轴建系.

对 $\Phi: U \to \mathbb{R}^3$ 形如 $\Phi(s,t) = (s, t, k_1 s^2 + k_2 t^2 + o(|s|^2 + |t|^2))$

$\Rightarrow$ Φ 在 $u = (0,0)$ 附近密切近似于一张二次曲面 (或平面)

- 定义：称 u 为 (Φ, U) 的椭圆点：$k_1 k_2 > 0$

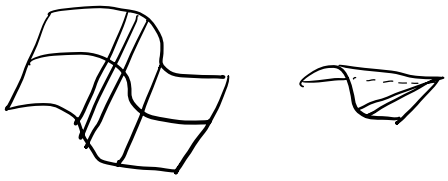
脐点 $\begin{cases} \text{圆点}: & k_1 = k_2 \neq 0 \\ \text{抛物点}: & k_1 k_2 = 0 \\ \text{平点}: & k_1 = k_2 = 0 \end{cases}$

双曲点 (鞍点)：$k_1 k_2 < 0$

例：(1) 半径 R 的圆球面：$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$. $H = -\frac{1}{R}$, $K = \frac{1}{R^2}$ (外指法向)

(2) 柱面、锥面：主方向为平行和垂直于母线的方向.

由二次曲面方程可知 $\begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & * \end{pmatrix}$. $K=0$



(3) 直纹面：算叶双曲面 $\begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix}$，$k_1 k_2 > 0$

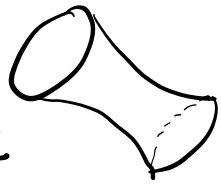
直纹方向 $k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0$ 对 (x, y)

有直线 $\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix}$ 不能正定/负定 $\Rightarrow K<0$

直线一般不是主方向.

(4) $H=0$（常数）的曲面称为 极小曲面 e.g. 肥皂泡

使曲面面积最小

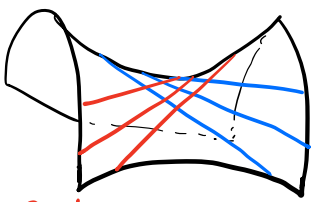


· 定义：曲率线：此处与主方向相切 非脐点附近有2条

渐近线：此处与渐近方向相切.（只有 $K<0$ 时）

测地线：$k_g = 0$（常数）

某点处通常有2条渐近线

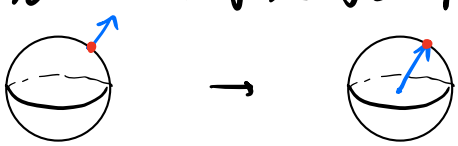


某点处通常有2条测地线

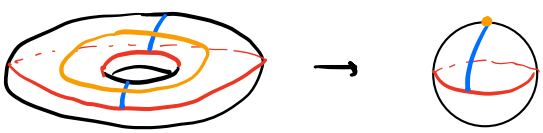
· 例：（Gauss 映射）

Gauss 映射与参数化无关，故对定向正则空间曲面都可定义

圆球面：



轮胎面：



Gauss 映射和 N 同向吗：

$g: S \to \mathbb{S}^2$

$K: S \to \mathbb{R}$

$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \det W = \det(-g_*)$ 是 W 和 Jacobi 行列式.

$\Rightarrow |K|_p = \lim_{r \to 0^+} \frac{\text{Area}_{\mathbb{S}^2}(g(D_r(p)))}{\text{Area}(D_r(p))}$

$\operatorname{sgn} K|_p$ 取决于 g 在 $p \in S$ 处是否诱导定向.

注：若 S 不可定向，则 $|K|: S \to [0, +\infty)$ 有定义.

$\operatorname{sgn} K$, g 无定义.

· 例：圆球面：$\int_S K \, dArea_S = \int_{S^2} dArea_{S^2} = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)$

轮胎面：$\int_S K \, dArea_S = \int_{S_1} K \, dArea_S + \int_{S_2} K \, dArea_S$

$= \int_{S^2} dArea_{S^2} - \int_{S^2} dArea_{S^2}$

$= 0 = 2\pi \chi(T^2)$

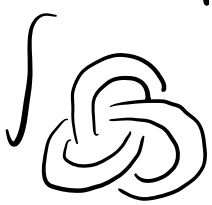
其中 $S_1 =$  ，$S_2 =$  ，K 在 S_1 和 S_2 方向相反.

· 定值：$K: S \to \mathbb{R}$ 会因 $S \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ 不同而复杂变化

而 $\int_S K \, dArea_S$ 反映整体性质.

注：事实上，S 可定向时，$\int_S K \, dArea_S = 2\pi \chi(S)$ (Gauss-Bonnet)

其中 $\chi(S) = 2 - 2g$

 $K \, dArea_S = \int$  $K \, dArea_S$

· Gauss 绝妙定理："K 完全由 E, F, G 决定"

注：即 K 是曲面片加一个内蕴几何量.

(与参数选取无关、与保长嵌入 $U \subset \mathbb{E}^3$ 无关)

来源：偏导数交换性

二阶偏导 $F = (\phi_s \ \phi_t \ \vec{n})$，则 $F_{st} = F_{ts}$

$\Rightarrow F^T F_{st} = F^T F_{ts}$

$\Rightarrow (F^T F_s)_t - F^T_t F_s = (F^T F_t)_s - F^T_s F_t$

$\Rightarrow (F^T F_s)_t - (F^T F_t)_s = F^T_t F_s - F^T_s F_t$

简易验证 LHS 和 RHS 为 3×3 反对称矩阵

故上述等式给出3个独立方程.

	①	②
		③

① 给出 Gauss 方程 $\Rightarrow$ Gauss 绝妙定理.

②③ 给出 Codazzi 方程 (2个)

① : $(\phi_s \cdot \phi_{ts})_t - (\phi_s \cdot \phi_{tt})_s = \phi_{st} \cdot \phi_{st} - \phi_{ss} \cdot \phi_{tt}$

② : $(\phi_s \cdot \vec{n}_s)_t - (\phi_s \cdot \vec{n}_t)_s = \phi_{st} \cdot \vec{n}_s - \phi_{ss} \cdot \vec{n}_t$

③ : $(\phi_t \cdot \vec{n}_s)_t - (\phi_t \cdot \vec{n}_t)_s = \phi_{tt} \cdot \vec{n}_s - \phi_{st} \cdot \vec{n}_t$

① $\Rightarrow$ Gauss 绝妙定理:

$\phi_s \cdot \phi_{ts} = \frac{1}{2}(\phi_s \cdot \phi_s)_t = \frac{1}{2} E_t$

$\phi_s \cdot \phi_{tt} = (\phi_s \cdot \phi_t)_t - \phi_{st} \cdot \phi_t = F_t - \frac{1}{2} G_s$

考虑 $\phi_{ss}, \phi_{st}, \phi_{tt}$ 的分解:

设 $\phi_{ss} = x\phi_s + y\phi_t + l\vec{n}$

$\Rightarrow \phi_s \cdot \phi_{ss} = xE + yF = \frac{1}{2} E_s$

$\phi_t \cdot \phi_{ss} = xF + yG = F_s - \frac{1}{2} E_t$

即: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_s \\ F_s - \frac{1}{2} E_t \end{pmatrix}$, x, y 只与 E, F, G 有关.

$\Rightarrow \phi_{st} \cdot \phi_{st} - \phi_{ss} \cdot \phi_{tt} = -(LN - M^2) +$ 只与 E, F, G 有关

故 $LN - M^2$ 只与 E, F, G 有关

$\Rightarrow K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ 只与 E, F, G 有关

- 更系统地研究：

设 $F_s = FA$, $F_t = FB$, $A, B: U \to M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

则 $F_{st} = (FA)_t = F_tA + FA_t = F(BA + A_t)$, $F_{ts} = F(AB + B_s)$

故 ① $\Leftrightarrow$ $A_t - B_s = AB - BA$ 但 A, B 未用 E, F, G 表示.

令 $P = F^TF = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $F^TF_s = PA$, $F^TF_t = PB$

故 ① $\Leftrightarrow$ $(PA)_t - (PB)_s = (PB)^TP^{-1}(PA) - (PA)^TP^{-1}(PB)$

而 $PA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G_s & \frac{1}{2}E_t & -L \\ F_s - \frac{1}{2}E_t & \frac{1}{2}G_s & -M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}$, $PB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_t & F_t - \frac{1}{2}G_s & -M \\ \frac{1}{2}G_s & \frac{1}{2}G_t & -N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Gauss 方程: $\frac{1}{2}(E_{tt} - 2G_{st} + F_{ss}) = -(LN - M^2) + \frac{P}{4(EG-F^2)}$

其中 P 是 E, F, G 及它们 1 阶偏导和 2 次方以来.

Codazzi 方程: $-L_t + M_s = \frac{1}{4(EG-F^2)}(*L + *M + *N)$

$-M_t + N_s = \frac{1}{4(EG-F^2)}(*L + *M + *N)$

其中 $*$ 是一些 E, F, G 及它们 1 阶偏导和 2 次方以来.

事实上, $A = P^{-1}\cdot PA$, $B = P^{-1}\cdot PB$ 均可用 E, F, G, L, M, N 表达.

- 特别地, 若 (s,t) 为正交参数, 则 $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{\sqrt{E}_t}{\sqrt{G}}\right)_t + \left(\frac{\sqrt{G}_s}{\sqrt{E}}\right)_s\right)$

- 指标记号表达 Gauss 方程、Codazzi 方程：

重记: $u = (u^1, u^2) = (s, t)$

$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\, du^\alpha \otimes du^\beta$ $(g_{ij} = g_{ji})$

$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ $h = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\, du^\alpha \otimes du^\beta$ $(h_{ij} = h_{ji})$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} \\ h^{21} & h^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \sum_\delta g^{\alpha\delta} g_{\delta\beta} = \delta^\alpha_\beta := \begin{cases} 1, & \alpha=\beta \\ 0, & \alpha\neq\beta \end{cases}$$

用指标记号算 $F_{st} = F_{ts}$：

记 $v_1 = \phi_s$, $v_2 = \phi_t$, $v_i : U \to V(\mathbb{E}^3)$

记 $\frac{\partial}{\partial u^\beta}(v_\alpha) = \sum_\gamma \boxed{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} v_\gamma + \boxed{h_{\alpha\beta}} \vec{n}$ → Christoffel 记号

记 $\frac{\partial}{\partial u^\beta}(\vec{n}) = -\sum_\gamma \boxed{h^\gamma_\beta} v_\gamma$

其中 $h^\gamma_\beta = \sum_\delta g^{\gamma\delta} h_{\delta\beta} \Rightarrow h_{\gamma\beta} = \sum_\delta g_{\gamma\delta} h^\delta_\beta$

事实上，$A = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{21} & -h^1_1 \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{21} & -h^2_1 \\ h_{11} & h_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & -h^1_2 \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & -h^2_2 \\ h_{12} & h_{22} & 0 \end{pmatrix}$

☆运算法则：
消去在上下同时出现的指标及 g, Σ
（保留其余指标的位置）

$\forall$ 向量场 $w : U \to V(\mathbb{E}^3)$,

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta}(w) = \underbrace{* v_1 + * v_2}_{\text{切方向}} + * \vec{n} \quad \text{法方向}$$

记作 $\nabla_\beta w$

即有：$\nabla_\beta(v_\alpha) = \sum_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} v_\gamma$

$$\nabla_\beta(\vec{n}) = \sum_\gamma -h^\gamma_\beta v_\gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\beta} v_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\gamma} v_\alpha$$

除去 $\perp \vec{n}$ 和 $\parallel \vec{n}$ 方向的等式即为 Gauss 方程和 Codazzi 方程.

- **Gauss**: $\nabla_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} v_\alpha\right) = \nabla_\beta\left(\frac{\partial}{\partial u^\gamma} v_\alpha\right)$ 切方向

$$\nabla_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} v_\alpha\right) = \nabla_\gamma\left(\sum_\delta \Gamma^\delta_{\alpha\beta} v_\delta + h_{\alpha\beta}\vec{n}\right)$$
$$= \sum_\delta \left(\frac{\partial \Gamma^\delta_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} v_\delta + \sum_\varepsilon \Gamma^\varepsilon_{\alpha\beta} \Gamma^\delta_{\varepsilon\gamma} v_\delta\right) + \sum_\delta (-h_{\alpha\beta} h^\delta_\gamma v_\delta)$$

时比系数：$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -(h_{\delta\beta} h_{\alpha\gamma} - h_{\delta\gamma} h_{\alpha\beta})$

其中 $R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \sum_\eta g_{\delta\eta} R^\eta_{\alpha\beta\gamma}$

V_δ的系数 ← $R^\delta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\delta_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\delta_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \sum_\eta \left(\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\eta\gamma} - \Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\eta\beta}\right)$

$\left(= h_{\alpha\beta}h^\delta_\gamma - h_{\alpha\gamma}h^\delta_\beta\right)$

注：(1) 完全：有效的本质上只有 R_{1212}

事实上，$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta}$

(2) Γ^k_{ij} 可用第一基本形式表达

$\frac{\partial}{\partial u^\beta}(V_\alpha) = \sum_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} V_\gamma + h_{\alpha\beta}\vec{n}$ 点乘 V_ξ 可解出：

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \sum_\delta \frac{g^{\gamma\delta}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right)$

- **Codazzi**： $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial h_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \sum_\delta \left(h_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} - h_{\gamma\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\right)$

注：(1) 以上由 $(U, g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta})$ 写出的 Gauss, Codazzi 方程

合称曲面论基本方程. 黎曼曲率张量.

(2) 可推验： $-\nabla_\gamma\nabla_\beta V_\alpha + \nabla_\beta\nabla_\gamma V_\alpha = \sum_\delta R^\delta_{\alpha\beta\gamma} V_\delta$

协变导数

(1,3)型： $\sum_{\delta,\alpha,\beta,\gamma} R^\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial u^\delta} \otimes du^\alpha \otimes du^\beta \otimes du^\gamma$

(0,4)型： $\sum_{\delta,\alpha,\beta,\gamma} R_{\delta\alpha\beta\gamma}\, du^\delta \otimes du^\alpha \otimes du^\beta \otimes du^\gamma$

无参数代换 $U = U(\tilde{U})$ 下形式不变.

(3)* 需要检验是否为张量.

e.g. $\sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial u^k} \otimes du^i \otimes du^j$ 不是张量.

它与联络的结构有关.

· 曲面论基本定理：

假设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 开区域，$u=(u^1,u^2)$，

(1) $g_{\alpha\beta}: D\to\mathbb{R}$ 为 C^3 光滑.

$(g_{\alpha\beta})_{2\times 2}$ 正定、对称

记 $g^{\alpha\beta}$，$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$，$R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ 如前.

(2) $h_{\alpha\beta}: D\to\mathbb{R}$ 为 C^3 光滑.

$(h_{\alpha\beta})_{2\times 2}$ 对称.

相容性条件.

若 $(D, g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta})$ 满足 Gauss、Codazzi 方程，

则 $\forall p\in D$，$\exists$ 开邻域 $U=U(p)\subset D$，$\phi: U\to V(E^3)$，"局部结论"

使 $g_{\alpha\beta}$，$h_{\alpha\beta}$ 实为 (U,ϕ) 的两类基本量.

且：若 $(U,\tilde{\phi})$ 也满足，则 $\tilde{\phi}=S\circ\phi$，S 为某 E^3 上刚体运动.

证明：(1) 由假设列出如下方程：未知函数 $(\phi; v_1, v_2, \vec{n})$，$D$ 中 $u=(u^1,u^2)$

对应曲面论中 $(r; t, n, b)$

$$\phi: D\to E^3,\quad v_1, v_2, \vec{n}: D\to V(E^3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial u^\alpha}=v_\alpha \\ \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta}=\sum\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}v_\gamma+h_{\alpha\beta}\vec{n} \\ \dfrac{\partial\vec{n}}{\partial u^\beta}=-\sum h^{\gamma}_{\beta}v_\gamma \end{cases}$$

$(v_1, v_2, \vec{n})$ 为一阶、线性(齐次) PDE 初值问题.

其中 $(\phi; v_1, v_2, \vec{n})$ 在 p 点有给定初值. $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$、$h^{\gamma}_{\beta}$ 由前给出.

初值满足：$\phi(p)\in E^3$，

$$v_\alpha(p)\cdot v_\beta(p)=g_{\alpha\beta}(p)$$

$$\vec{n}(p)=\frac{v_\alpha(p)\times v_\beta(p)}{\|v_\alpha(p)\times v_\beta(p)\|}$$

(2) 方程对 $(v_1, v_2, \vec{n})$ 为 PDE 初值问题.

由 v_1, v_2 解中可以得到曲面片.

(3) 假设已知解 $(\Phi; V_1, V_2, \Pi)$ 局部存在性

可如下验证定理：

- (U, Φ) 满足第一、第二基本初值 $(g_{\alpha\beta}), (h_{\alpha\beta})$.

  初值决定 $(g_{\alpha\beta})$ 被实现

  若原 V_α, V_β 所满足 PDE 在 U 上处处实现 $(g_{\alpha\beta})$.

  用 $V_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta}$ 和第三个方程验证 $(h_{\alpha\beta})$ 上处处实现

- 若 (U, Φ) 也满足方程，

  则三点将 $(\Phi; V_1, V_2, \Pi)|_P$ 映到 $(\vec{\Phi}, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{n})$

  用 PDE 局部初值解的性质.

(4) 一般形式 PDE 初值理论：

未知(数值)函数 $y^1 = y^1(x^1, \cdots, x^n) \in C^2(D)$

$\cdots\cdots$

$y^m = y^m(x^1, \cdots, x^n) \in C^2(D)$

方程 $\frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} = f^j_\alpha(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^m)$, $f^j_\alpha \in C^1(D \times \mathbb{R}^n)$

初值 $y^j(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \cdots, \hat{x}^n) = \hat{y}^j$

对上述问题：

(i) 若存在 $U \subset D$ 有解，则唯一

(ii) 通常只能论断解的局部存在性

(iii) 解应满足 $\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} y^j = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} y^j$

故解局部存在 $\Rightarrow \frac{\partial f^j_\beta}{\partial x^\alpha} + \sum_k \frac{\partial f^j_\beta}{\partial y^k} f^k_\alpha = \frac{\partial f^j_\alpha}{\partial x^\beta} + \sum_k \frac{\partial f^j_\alpha}{\partial y^k} f^k_\beta$ (*)

(iv) (*) 也是局部解存在的充分条件. 证明涉及多重积分和 Stokes 公式

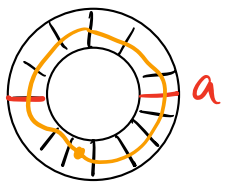
注：(*) 条件在曲面论基本方程中等价于

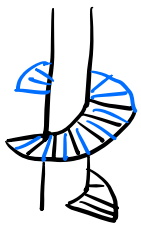
Gauss - Codazzi 条件.

即：Gauss-Codazzi 系数是 (gab) (hab) 相容的全部限制.

例：(整体的未必存在)

考虑螺旋面：D：





ϕ：D\a → 如图黑色

ψ：D\b → 如图蓝色.

对 ϕ,ψ 分别定义 D\a, D\b 上第一、第二基本形式在 D\(a∪b) 相同.

⇒ 其实同定义 D 上 (gab), (hab).

由曲面论基本定理的唯一性部分：

棕色闭路映到 V(E³) 的起点沿全程不同 D不是单连通的

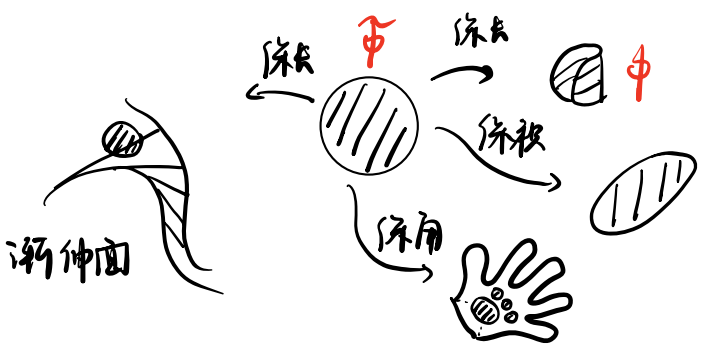
⇒ 非 $\varphi: D \to V(E^3)$ 实现 D 上 (gab), (hab)

- 可积性系数 (Frobenius 定理)
- 已成 成曲面的整体部分

- 定义：$\phi: U \to E^3$，$\tilde{\phi}: \tilde{U} \to E^3$，$T: \tilde{U} \xrightarrow{\cong} U$ 为微分同胚

使 $\tilde{\phi}$ 和 $\phi \circ T$ 有相同的第一类基本量，则 T 为保长映射





渐伸面：$\phi(s,t) = r(s) + t r'(s)$

当平面上同时保长时在.

· 命题：(1) τ 保长 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} E\circ\tau & F\circ\tau \\ F\circ\tau & G\circ\tau \end{pmatrix} J$

$\Leftrightarrow \tau^*(E\,ds^2 + 2F\,ds\,dt + G\,dt^2) = \tilde{E}\,d\tilde{s}^2 + 2\tilde{F}\,d\tilde{s}\,d\tilde{t} + \tilde{G}\,d\tilde{t}^2$

(2) τ 保角 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \lambda \cdot J^T \begin{pmatrix} E\circ\tau & F\circ\tau \\ F\circ\tau & G\circ\tau \end{pmatrix} J$，$\lambda : \tilde{U} \to \mathbb{R}^+$

(3) τ 保积 $\Leftrightarrow \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = |\det J| \sqrt{EG - F^2}$

(4) τ 保长 $\Leftrightarrow \tau$ 保角且保积.

· 问：空间曲面片局部何时存在保长/保角/保积对应？

· 命题：(1) 3 保长对应 $\Rightarrow$ Gauss 曲率函数 $K : U \to \mathbb{R}$ 对应相等

但反之不成立

(2) 局部总存在保角/保长对应

例：(同曲不同长) $S_{a,b}$：$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ $(ab \neq 0)$

$(x, y, z) = \phi(s,t) = (as,\ bt,\ \frac{1}{2}(as^2 + bt^2))$

$\Rightarrow g = a^2(1+s^2)\,ds^2 + 2ab\,st\,ds\,dt + b^2(1+t^2)\,dt^2$

$h = (a\,ds^2 + b\,dt^2) / \sqrt{1+s^2+t^2}$

$\Rightarrow K = \frac{1}{ab(1+s^2+t^2)}$

$\Rightarrow$ 只要 ab 保持不变，$S_{a,b}$ 的 K 函数就保持不变.

比较 $S_{1,b}$，$S_{2,3}$：若 $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 保长

则：τ 将 $(0,0)$ 映成 $(0,0)$，将同心圆映到相同 K 的同心圆.

$\Rightarrow \tau_* : T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 \to T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ 只能为旋转或反射.

但其不能将 $ds^2 + 9\,dt^2|_{(0,0)}$ 映成 $4\,ds^2 + 9\,dt^2|_{(0,0)}$

$\Rightarrow \tau$ 不存在！

例：(伪球面) $(x,y)\in(-\pi,\pi)\times[1,+\infty)$

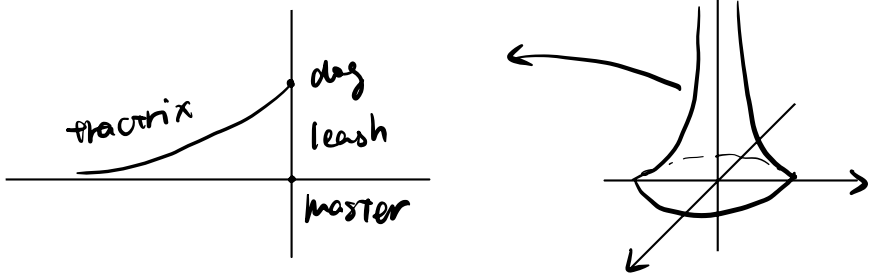
$$\phi(x,y)=\left(\frac{\cos x}{y},\ \frac{\sin x}{y},\ \operatorname{arcosh} y-\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\right)$$

$$(\operatorname{arcosh} y)'=\frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} y)}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$\phi_x=\left(-\frac{\sin x}{y},\ \frac{\cos x}{y},\ 0\right)$$

$$\phi_y=\left(-\frac{\cos x}{y^2},\ -\frac{\sin x}{y^2},\ \frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}\right)$$

$$\Rightarrow g=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}\Rightarrow K\equiv -1$$



注：(1) 双曲平面的上半平面模型可局部保长嵌入$\mathbb{E}^3$. (如上)

(2) 还可用母线：$Z(x)=\int\sqrt{\frac{a^2b^2-x^2}{a^2(1-b^2)+x^2}}\,dx$，上例为 $b=1$.

(3) 是否 $\forall D\subset\mathbb{R}^2$，$E\,ds^2+2F\,ds\,dt+G\,dt^2$ 局部上都可保长嵌入$\mathbb{E}^3$？

若 $E,F,G\in C^\omega$（实解析），是.

若 $K(0)=0$ 附近太坏，否.

C^∞，未解决.

例：(保角)

保角参数替换：$\tilde{\varphi}=\varphi\circ T$

(U,φ)，$(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ 为等温参数系：

$\rho(s,t)(ds^2+dt^2)$，$\tilde{\rho}(\tilde{s},\tilde{t})(d\tilde{s}^2+d\tilde{t}^2)$

只要 $T:(\tilde{s},\tilde{t})\to(s,t)$ 的 Jacobi 矩阵处处正定，

则 T 保角

λA，$A\in SO(2)$，$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

若改写：$\tilde{z}=\xi+i\eta$，$z=s+it$. $\zeta:\tilde{z}\mapsto z=f(\tilde{z})$

只要 f 复解析或 f 为复解析函数取共轭，$f'(\tilde{z})\neq 0$，则 ζ 保角

注：黎曼单值化定理：单连通区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$，$\Omega\neq\mathbb{C}$，

则 $\exists$ 双全纯 φ，将 Ω 映为 D^2

例：（体积）

体积参数指标 $(U,(s,t))$

任取 $H\in C^\infty(U)$，可构造一个光滑向量场 X_H，

s.t. $\forall$ 向量场 y，$\omega(X_H,y)=(dH)(y)$

则 X_H 生成的光滑自同胚 $\varphi_t:U\to U$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有定义，

$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_t)=X_H$ 且 φ_t 保 ω.

面积动 $\mathcal{A}$ $ds\wedge dt=\omega|_p:T_pU\times T_pU\to\mathbb{R}$

是 $2n$ 维时空是辛动 $\mathcal{A}$

- 对曲面而言：$(\dim=2)$

体积变换群 $\to$ 黎曼几何

保角变换群 $\to$ 共形几何 $\to$ 复几何

保积变换群 $\to$ 辛几何（$2n$ 维）、切触几何（$2n+1$ 维）

- 等温参数系的局部存在性：(U,Φ)，$E\,ds^2+2F\,ds\,dt+G\,dt^2$

(1) 形 $\mathcal{A}$ 上没 $E\,ds^2+2F\,ds\,dt+G\,dt^2=(a\,ds+b\,dt)(\bar{a}\,ds+\bar{b}\,dt)$，

a, b 为关于 (s,t) 的复值函数.

(2) 想找 $\lambda: U' \to \mathbb{C}$, $U' \subset U$, 使 $\lambda(a\,ds + b\,dt) = df$

这样 $E\,ds^2 + 2F\,ds\,dt + G\,dt^2 = \frac{df}{\lambda}\cdot\frac{\overline{df}}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{|\lambda|^2}\cdot|df|^2 = \frac{1}{|\lambda|^2}(dx^2+dy^2)$

其中 $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

即: $(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t))$ 的逆对应

将 (U') 中代换为 $(\tilde{x}, \tilde{y})$, 且 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 为等温坐标系.

(3) 由(2): 只需让积分因子入和向部存在性.

(4) 先考虑 a, b 实值时:

给定 $(\hat{s}, \hat{t}) \in U$, 考虑ODE初值问题: $\begin{cases} \frac{dT(s)}{ds} = -\frac{a(s,T(s))}{b(s,T(s))} \\ T(\hat{s}) = \hat{t} \end{cases}$

则 真在 $\hat{s}$ 附近有解 $T(s) \triangleq T(s,t)$ 初值七确定的解.

取 f 为 $(s,t) \mapsto (s, T(s,t))$ 的逆映射在 t 分量的投影 (在 $(\hat{s},\hat{t})$ 附近).

即: $t = f(s, T(s,t))$

关于 s 求导 $\Rightarrow$ $0 = f_s(s, T(s,t)) + f_t(s, T(s,t))\cdot T_s(s,t)$

$= f_s(s, T(s,t)) - f_t(s, T(s,t))\frac{a(s,T(s,t))}{b(s,T(s,t))}$

用 $f(s,t)$ 替换 t, 再代入 $t = T(s, f(s,t))$,

则: $\frac{f_s(s,t)}{f_t(s,t)} = \frac{a(s,t)}{b(s,t)}$

$\Rightarrow \exists \lambda(s,t)$, $f_s(s,t) = \lambda(s,t)a(s,t)$, $f_t(s,t) = \lambda(s,t)b(s,t)$

$\Rightarrow df = \lambda(a\,ds + b\,dt)$

(5) 复值时: 实际上可取 $a = \sqrt{E}$, $b = \frac{-F + i\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}$

E, F, G 解析 $\Rightarrow$ 有积分解 $\Rightarrow$ 积分因子存在.

E, F, G 光滑时, 证明较复杂.