第二章 跳过程

连续时间：间隔一个随机时间走一步.

$\{X_n : t\in\mathbb{R}^+\}$ 记为 $\{X_t : t\geq 0\}$

- 定义：S 非空可数，$\forall n$，$0\leq t_1<\cdots<t_n<s$，$\forall v_1, v_2, \cdots, v_n$，$i,j\in S$，

$$P(X_{t+s}=j \mid X_s=v,\ X_{t_1}=v_1,\ \cdots,\ X_{t_n}=v_n)$$
$$=P(X_{t+s}=j \mid X_s=v)=P_{ij}(t)$$

则 $\{X_n\}$ 称为连续时间参数取马氏链.

称 $\{X_n\}$ 时齐，若 $P_{ij}(t)$ 不依赖于 s

转移矩阵：$P(t)=\{P_{ij}(t)\}_{i,j\in S}$

本章思路：不从 $P(t)$ 推导轨道性质

而是构造一类过程，再说明其即是所有连续时间马氏链

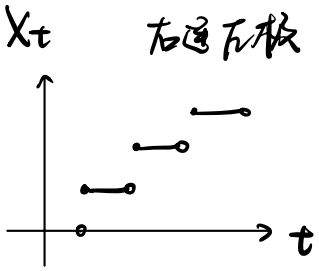
2.1 泊松过程

一、基于指数分布.

$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n \overset{i.i.d}{\sim} Exp(\lambda)$

$X_t\triangleq|\{n\geq 1: S_n\leq t\}|=\sup\{n\geq 0: S_n\leq t\}$

$S_n=\inf\{t\geq 0: X_t\geq n\}$



- 定义：$\{X_t: t\geq 0\}$ 泊松过程 （Exp 的无记忆性 ⇒ 马氏性）

$\{S_n: n\geq 1\}$ 泊松流（点过程） 泊松流形式更易推广.

$\{\xi_n: n\geq 1\}$ 等待时间.

λ：速率，参数，强度

e.g. 高斯分布不易推广到无穷维.

但特征函数易推广.

$\{X_t\}$ 是泊松过程 ⇔ $\{S_n\}$ 是泊松流

- 定理 2.1.3：$\forall t\geq 0$, $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

固定 $t\geq 0$, $P(X_t=0) = P(S_1>t) = e^{-\lambda t}$

$k\geq 1$ 时, $\{X_t=k\} = \{S_k\leq t < S_{k+1}\}$

设 $S_r = X_1+\cdots+X_r$

$C_k \triangleq \{\vec{x}\in\mathbb{R}^k : x_1,\cdots,x_k\geq 0 \text{ 且 } S_k\leq t\}$

$D_k \triangleq \{(\vec{x}, x_{k+1})\in\mathbb{R}^{k+1} : \vec{x}\in C_k, x_{k+1} > t-S_k\}$

$\Rightarrow \{S_k\leq t<S_{k+1}\} = \{(\xi_1,\cdots,\xi_{k+1})\in D_k\}$

$\therefore P(X_t=k) = \int_{(\vec{x},x_{k+1})\in D_k} \lambda^{k+1} e^{-\lambda S_{k+1}} d\vec{x}\, dx_{k+1}$

$= \int_{\vec{x}\in C_k} \lambda^k e^{-\lambda S_k} d\vec{x} \int_{x_{k+1}>t-S_k} \lambda e^{-\lambda x_{k+1}} dx_{k+1}$

$= \int_{\vec{x}\in C_k} \lambda^k e^{-\lambda S_k} e^{-\lambda(t-S_k)} d\vec{x}$

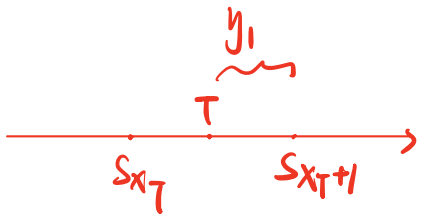
$= \lambda^k e^{-\lambda t} \int_{\vec{x}\in C_k} d\vec{x} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t} t^k}{k!}$

- $T>0$, 令 $Y_t = X_{T+t} - X_T$, $\forall t\geq 0$. （起点为 T）

$\{\eta_k\}$ 是 $\{Y_t\}$ 的时间.

$\eta_1 = \xi_{X_T+1} - (T-S_{X_T})$

$\eta_2 = \xi_{X_T+2}$



- 定理 2.1.4：$X_T, \eta_1, \eta_2, \cdots$ 相互独立 且 $\forall n\geq 1$, $\eta_n \sim \text{Exp}(\lambda)$（只需证：$\eta_1\sim\text{Exp}(\lambda)$）

$\forall k\geq 0$, $n\geq 1$, $t_1,\cdots,t_n>0$,

$\{X_T=k, \eta_1>t_1, \cdots, \eta_n>t_n\}$

$= \{S_k\leq T, S_{k+1} > T+t_1, \xi_{k+2}>t_2, \cdots, \xi_{k+n}>t_n\}$

由 η_1 的定义　　跟前面独立

$\Rightarrow P(X_T=k, y_1>t_1, \cdots, y_n>t_n)$

$=P(S_k\in T,\ S_{k+1}>T+t_1)\, e^{-\lambda(t_1+\cdots+t_n)}$

而 $P(S_k\in T,\ S_{k+1}>T+t_1)$

$=\int_{\vec{x}\in C(k,T)} \lambda^k e^{-\lambda s_k} d\vec{x} \int_{x_{k+1}>T+t_1-s_k} \lambda e^{-\lambda x_{k+1}} dx_{k+1}$

$=\int_{\vec{x}\in C(k,T)} \lambda^k e^{-\lambda s_k} d\vec{x}\ \ e^{-\lambda(T+t_1-s_k)} = \lambda^k e^{\lambda(T+t_1)} \frac{T^k}{k!}$

且计算可知独立：$\text{左式}=P(X_T=k)\cdot P(y_1>t_1)$

进而 $y_1\sim \text{Exp}(\lambda)$

独立增量性

- 推论 2.1.6：$P(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}=k_i,\ i=1,2,\cdots,r)=\prod_{i=1}^{r} P(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}=k_i)$
- 推论 2.1.8：泊松过程满足马氏性.

2. 基于均匀分布与泊松分布

泊松流：$|S_n: n\geq 1| \triangleq \Xi$

$\Xi(\omega)=\{S_1(\omega), S_2(\omega), \cdots\}\subseteq \mathbb{R}_+$ 随机点集

$X_T(\omega)=|[0,T]\cap \Xi(\omega)|$

$\Xi_T=\Xi\cap[T,+\infty)-T$

- 推论 2.1.5：Ξ_T 为泊松流 且与 $|\Xi\cap[0,T]|$ 独立.

- 命题 2.1.9：$P(S_1\leq s \mid X_T=1)=\frac{s}{T},\ 0<s<T.$ 均匀分布

$$LHS=\frac{P(S_1\leq s, X_T=1)}{P(X_T=1)}=\frac{P(S_1\leq s, S_2>T-S_1)}{P(X_T=1)}$$

而 $P(S_1\leq s, S_2\geq T-S_1)=\int_0^s\int_{T-u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda v} dv du$

$P(X_T=1)=e^{-\lambda T}\lambda T \quad \Rightarrow LHS=\frac{s}{T}$

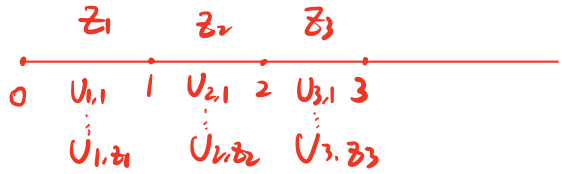
· 命题 2.1.10：$\{X_T=k\}$ 的条件下，$(S_1,\cdots,S_k) \overset{d}{=} (U_1,U_2,\cdots,U_k)$

其中 $U_1,U_2,\cdots$ i.i.d $U[0,T]$ 条件密度：$\frac{k!}{T^k}$

· 命题 2.1.11：（泊松流的构造）

$z_n \overset{i.i.d}{\sim} P(\lambda)$，$U_{n,i} \sim U(n-1,n]$，$\forall i$

则：$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{U_{n,1},U_{n,2},\cdots,U_{n,z_n}\}$ 是泊松流.



三. 泊松过程 / 泊松流的合并与细分.

· 定理 2.1.12：(1) 已，已′ 独立，速率 λ_1,λ_2，

则 已∪已′ 是速率 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松流.

(2) 泊松过程 $\{X_t\},\{Y_t\}$，速率 λ_1,λ_2.

则 $\{X_t+Y_t\} \sim PP(\lambda_1+\lambda_2)$

已$\cap(0,1] \overset{d}{=} \{U_1,U_2,\cdots,U_z\}$，$z\sim P(\lambda_1)$

已′$\cap(0,1] \overset{d}{=} \{\hat{U}_1,\hat{U}_2,\cdots,\hat{U}_w\}$，$w\sim P(\lambda_2)$

则 $(已\cup已')\cap(0,1] \overset{d}{=} \{\tilde{U}_1,\tilde{U}_2,\cdots,\tilde{U}_{z+w}\}$，$z+w\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

· 定理 2.1.13：$\{\phi_i\}$ i.i.d. $P(\phi_i=1)=p$，$P(\phi_i=0)=1-p$.

$已=\{S_i\}$，速率 λ

$\tilde{已}=\{S_i:\phi_i=1\}$，$\hat{已}=\{S_i:\phi_i=0\}$.

则 $\tilde{已}\sim PP(p\lambda)$，$\hat{已}\sim PP((1-p)\lambda)$

· 定义：泊松过程 $\{X_t\}$，速率 λ，$\tau_1, \tau_2, \cdots$ i.i.d 与 $\{X_t\}$ 独立，

$Y_t = \sum_{n=1}^{X_t} \tau_n$ 称为复合泊松过程

后果

2.2 跳过程

一. 纯生指数 闹钟 模型

$\forall$ 状态 i，闹钟 $\sim \mathrm{Exp}(q_i)$ 死状态 i，此处闹钟响以 $\hat{p}_{ij}$ 概率跳到 j

$q_i = 0$：吸收态 $i \to j$ 的闹钟 $\sim \mathrm{Exp}(q_{ij})$

$q_i \neq 0$：$\{\hat{p}_{ij}\}$ 跳跃概率，$\hat{p}_{ii} = 0$，$\sum \hat{p}_{ij} = 1$

定义：$q_{ij} = q_i \cdot \hat{p}_{ij}$，$\forall i \neq j$，$q_{ii} \triangleq -q_i$，保持 $P = e^{Qt}$ 为转移矩阵.

$Q = \{q_{ij}\}$ 称为转移速率矩阵.

为：$q_{ij} \geq 0$，$\forall j \neq i$，$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$，$\forall i \in S$

各方面，若 $Q = \{q_{ij}\}$ 满足 $q_{ij} \geq 0$，$\forall j \neq i$，$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$，$\forall i \in S$

若 $q_i = 0$，$\hat{p}_{ij} = 1$

若 $q_i > 0$，$\hat{p}_{ii} = 0$，$\hat{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$，$j \neq i$

泊松过程：$\hat{p}_{i,i+1} = 1$ $\hat{P}$ 和 Q 一一对应

事实上，$\{X_t\} \in S$

$\{p_{ij}(t)\} \triangleq P(t)$

$P(t) \cdot P(s) = P(s+t)$ （分区半群）

$\Rightarrow \exists$ 矩阵 Q，s.t. $P(t) = e^{Qt}$，$Q = \{q_{ij}\}$

2. 跳过程

称作给定了轨道

嵌入链：$\{\hat{X}_n\}$ 以 $\hat{P}$ 为转移矩阵的马氏链 → 跳到哪？

$\xi_0, \xi_1, \cdots$ i.i.d. $\sim Exp(1)$ 与 $\{\hat{X}_n\}$ 独立. → 什么时候跳?

等待时间: $\eta_n = \frac{\xi_n}{q_{\hat{X}_n}}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

若 $\hat{X}_n = i$, 则 $\eta_n = \frac{\xi_n}{q_i} \sim Exp(q_i)$

跳跃时间: $S_0 = 0$, $S_1 = \eta_0, \cdots, S_n = \eta_0 + \cdots + \eta_{n-1}$

无穷点: $P(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \mid \hat{X}_0 = i) = 1$, $\forall i \in S$ (*)

$\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$ 时 "爆炸"

此时令 $X_t = \hat{X}_n$, $\forall t \in [S_n, S_{n+1})$

- 引理 2.2.2: $\{q_i : i \in S\}$ 有界, 则 (*) 成立.

状态空间有限, 则 (*) 成立.

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi_k}{q_{\hat{X}_k}} \geq \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \to +\infty$

- 引理 2.2.5: $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 独立, $\xi_n \sim Exp(\lambda_n)$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, 则 $P(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n < \infty) = 1$

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, 则 $P(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty) = 1$

$T_n \triangleq \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $T_\infty \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$

$\Rightarrow E T_\infty = \lim_{n\to\infty} E T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Rightarrow$ (1) 成立

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{\lambda_n}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$

即 $E e^{-\xi_n} = \frac{1}{1+\lambda_n} \Rightarrow E e^{-T_\infty} = 0 \Rightarrow$ (2) 成立.

技巧: 证 $P(* = \infty) = 1$ 困难.

但证 $P(e^{-*} = 0) = 1$ 容易.

- 推论 2.2.6: 给定 $i \in S$, 若 $\exists \lambda > 0$,

s.t. $q_i \le \lambda d(0,i)$, $\forall i \in S\setminus\{0\}$.

其中 $d(0,i) = \inf\{n>0 : \hat{P}_{0i}^{(n)} > 0\}$.

则 $P_0(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$.

不妨 $q_0 > 0$ ($q_0 = 0$ 时显然成立). $\forall n \ge 1$, $d(0, \hat{X}_n) \le n$.

$\Rightarrow q_{\hat{X}_n} \le \lambda n$

$\Rightarrow \eta_n = \frac{\xi_n}{q_{\hat{X}_n}} \ge \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\xi_n}{n} \sim \mathrm{Exp}(\lambda n)$. 用引理 ✓

三. 例子

例 2.2.7 (纯生过程). $S = \{1, 2, \cdots\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 正数.

令 $q_i = q_{i,i+1} = \lambda_i$

则 $P_i(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ 时, $\hat{X}_n = \hat{X}_0 + n$

例 2.2.8 (Yule 过程/分裂过程) $\lambda_i = i\lambda$ 的纯生过程.

i 个个体, 每个分裂速率为 λ $\Rightarrow$ 总体分裂速率为 $i\lambda$ 消极过程的叠加.

例 2.2.9 (生灭过程) $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $q_{i,i+1} = \beta_i$, $q_{i,i-1} = \delta_i$.

$|i-j| \ge 2$ 时, $q_{ij} = 0$

$\exists C > 0$, s.t. $\beta_i, \delta_i \le Ci$ $\Rightarrow$ (*)成立 证明略.

例 2.2.10 (排队系统) $M|M|1$: 等新客人时间 memoryless, 服客时间 memoryless, $\beta_i = \lambda$, $\delta_i = \alpha$ 的生灭过程

顾客到达: 消极流速率 λ

1 个服务员.

1个服务员：服务速率 α.

X_t：t 时刻队列长度

M|M|s: $\beta_i=\lambda$, $\delta_i=\alpha\min\{i,s\}$ 的生灭过程

M|M|∞: $\beta_i=\lambda$ $\delta_i=\alpha i$ 的生灭过程

例 2.2.11 (通讯时间和分支过程) $\beta_i=\beta i$, $\delta_i=\delta i$ 的生灭过程

个体寿命 $Exp(\beta+\delta)$, $p_0=\frac{\delta}{\beta+\delta}$, $p_2=\frac{\beta}{\beta+\delta}$

例 2.2.12 (接触过程) $S=\{A: A\subset\mathbb{Z}, |A|<\infty\}$

A_t: t 时刻感染粒子所处顶点集合.

$q_{A,A\setminus\{i\}}=1$, $i\in A$.

$q_{A,A\cup\{i\}}=\lambda|A\cap\{i-1,i+1\}|$, $i\notin A$. 以速率入传染相邻个体.

$q_{A,B}=0$, 其他. 两个事件同时发生的概率为0.

* Harris 图.

四. 转移概率与转移速率.

$P_{ij}(t)=P_i(X_t=j)$

$N_t=\sup\{n\geq 0: S_n\leq t\}$ 跳跃次数.

$n=0$ 时. $P_i(X_t=j, N_t=0)=P_i(S_1>t)1_{\{j=i\}}$.

$n\geq 1$ 时, 记 $\vec{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$, x_r 表示 $S_{r+1}-S_r$ 的值.

记 $\Delta_n=\{\vec{x}: x_r>0, r=0,1,\cdots,n-1, x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}<t\}$

取定 j, $\forall i_1,\cdots,i_n\in S$. $\forall D\subset\Delta_n$.

$$P_\pi(N_t=n,\ \hat{X}_0=i_0,\ \hat{X}_1=i_1,\cdots,\hat{X}_n=i_n,\ (\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\in D)$$
$$=\prod_{r=0}^{n-1}\hat{P}_{i_r,i_{r+1}}\int_D\prod_{r=0}^{n-1}q_{i_r}e^{-q_{i_r}x_r}e^{-q_{i_n}(t-\sum_{r=0}^{n-1}x_r)}dx_0\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$
$$=\prod_{r=0}^{n-1}q_{i_r,i_{r+1}}\int_D\left(\prod_{r=0}^{n-1}e^{-q_{i_r}x_r}\right)e^{-q_{i_n}(t-\sum_{r=0}^{n-1}x_r)}dx_0\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$
$$\text{记 } \varphi(\Delta_n)=\int_{\Delta_n}\left(\prod_{r=0}^{n-1}e^{-q_{i_r}x_r}\right)e^{-q_{i_n}(t-\sum_{r=0}^{n-1}x_r)}dx_0\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$
$$\Rightarrow P_{ij}(t)=e^{-q_it}1_{\{j=i\}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}\in S}\left(\prod_{r=0}^{n-1}q_{i_r,i_{r+1}}\right)\varphi(\Delta_n).$$

- 命题 2.2.13：马氏性.

  嵌入链满足马氏性；等待时间无记忆性.

- 推论 2.2.14：(Chapman-Kolmogorov) $\forall t,s\geq 0,\ P(t+s)=P(t)\cdot P(s)$

  $\Rightarrow P(t)=e^{Qt}$

- 定理 2.2.15 (连续可微性)：$\forall i,j\in S$, 则,

  $P_{ij}(t)\xrightarrow{t\to 0^+}0$, $\frac{P_{ij}(t)}{t}\xrightarrow{t\to 0^+}q_{ij}$

  $P_{ii}(t)\xrightarrow{t\to 0^+}1$, $\frac{1-P_{ii}(t)}{t}\xrightarrow{t\to 0^+}q_i$

  为什么又是速率？

  一页跳了

  $\forall i\neq j$, $P_{ij}(t)\leq 1-P_{ii}(t)=P_i(X_t\neq i)\leq P_i(S_1<t)=1-e^{-q_it}$

  $\Rightarrow P_{ij}(t)\xrightarrow{t\to 0^+}0$, $P_{ii}(t)\xrightarrow{t\to 0^+}1$

  下证：$\frac{1}{t}P_i(X_t=j,N_t=1)\to q_{ij}$

  $\frac{1}{t}P_i(N_t=1)\to q_i$

  $\frac{1}{t}P_i(N_t\geq 2)\to 0$

  $P_i(N_t=1,X_t=j)=q_{ij}\int_{x_1\leq t<x_1+x_2}e^{-q_ix_1}q_je^{-q_jx_2}dx_1dx_2$

  $=q_{ij}e^{-q_it}\int_0^t e^{(q_j-q_i)x_1}dx_1\xrightarrow{t\to 0}0$

$\Rightarrow \frac{1}{t} P_i(X_t=j, N_t=1) \xrightarrow{t\to 0} q_{ij}$

而 $P_i(N_t\geq 1) = P_i(S_1 \leq t) = 1-e^{-q_i t} \Rightarrow \frac{P_i(N_t\geq 1)}{t} \to q_i$

$\Rightarrow$ 由Fatou引理: $\liminf_{t\to 0} \frac{P_i(N_t=1)}{t} = \liminf_{t\to 0} \frac{\sum_{j\neq i} P_i(N_t=1, X_t=j)}{t}$

$\geq \sum_{j\neq i} \liminf_{t\to 0} \frac{P_i(X_t=j, N_t=1)}{t} = q_i$

说明关键: $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i$ --- 称为 Q 的保守性.

由上: $\frac{P_{ij}(t)}{t} \xrightarrow{t\to 0} q_{ij}$

$\frac{1-P_{ii}(t)}{t} = \frac{P_i(N_t=1)}{t} + \frac{P_i(X_t\neq i, N_t\geq 2)}{t} \xrightarrow{t\to 0} q_i$

- 命题2.2.16: $P_{ij}(t)$ 对 t 可微 且:

$P_{ij}'(t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(t) q_{kj}$ ($P'(t) = P(t)\cdot Q$) Kolmogorov 前进方程

$P_{ij}'(t) = \sum_{k\in S} q_{ik} P_{kj}(t)$ ($P'(t) = Q\cdot P(t)$) --- 后退 ---

注: 1. Q 常值时, $P(t) = e^{Qt}$, 前进、后退相同.

2. $Q = Q(s)$, $P = P(s,t) = e^{\int_s^t Q(u)du}$

前进: P 对 t 求导

后退: P 对 s 求导 $\mu'(t) = \mu(0) P'(t)$, $\mu(t) = \mu(0) P(t)$

3. $P(X_t=i) = \mu_i(t) \Rightarrow \frac{d\mu_i(t)}{dt} = \sum_k \mu_k(t) q_{ki}$

即: $\mu'(t) = \mu(t)\cdot Q$ (前进方程).

4. 后退方程更本质 --- 无穷小生成元

五. 首达时

$D\subset S$. $\tau_D = \inf\{t\geq 0 : X_t \in D\}$, $\tau_{\{i\}} = \tau_i$

嵌入链的首达时 $\hat{\tau}_D$

对: $\tau_D = S_{\hat{\tau}_D}$, $\hat{\tau}_D < \infty$

$\tau_D = \infty$, $\hat{\tau}_D = \infty$

$\sigma_D = \inf\{t \geq S_1 : X_t \in D\}$

$\alpha_i = \hat{\alpha}_i = P_i(\hat{\tau}_D < \infty) = P_i(\tau_D < \infty)$

对: $x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j$, $i \notin D$

$y_i = E_i \tau_D$

对: $y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j \Rightarrow \sum_j q_{ij} y_j = 1$ (后退方程)

$\frac{1}{q_i}$ 此等待时间的期望 (以等一分再跳)

2.3 常返

可达、互通、不可约、常返: 嵌入链~, 对跳过程~

$\{X_n\}$ 访问状态 i 的时刻记为 $\hat{T}_{i,0}, \hat{T}_{i,1}, \cdots$

访问 i 的总次数记为 $\hat{V}_i$

记 $T_{i,r} = S_{\hat{T}_{i,r}}$, $r = 0, 1, 2, \cdots$

$\xi_{i,r} = \eta_{\hat{T}_{i,r}}$, $r = 1, 2, \cdots$ $[T_{i,r}, T_{i,r} + \xi_{i,r})$ 停留在状态 i

- 引理 2.3.1: (1) $\{\hat{V}_i = \infty\}$ 下, $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots$ i.i.d. $\sim Exp(q_i)$

  强马性 (2) $\{\hat{V}_i = n\}$ 下, $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,n}$, i.i.d $\sim Exp(q_i)$

- 推论 2.3.2: 设不可约, 嵌入链常返,

  则 $\forall i \in S$, $P_i(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$.

- 定义: 格林函数 $G_{ij} = \int_0^\infty P_{ij}(t)\,dt = E_i V_j$, $\hat{G}_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$

其中 $V_j = \int_0^\infty 1_{\{X_t=j\}}\,dt = \sum_{r=1}^{\hat{\nu}_j} S_{j,r}$ 是在 j 和点停留时间.

$G_{ij} = E_i V_j = E_i(E_i(V_j \mid \hat{\nu}_j)) = E_i(\frac{1}{q_j}\hat{\nu}_j) = \frac{1}{q_j}\hat{G}_{ij}$

例 2.3.5 $M/M/1$: $\lambda < \alpha$ 常返, $\lambda > \alpha$ 非常返

2.4 正常返与不变分布

设不可约. 常返. $|S| > 1$.

τ_i, G_i. $X_0 = i$, $T_{i,0} = \tau_i = 0$

$T_{i,1} = G_i$, $G_{i,r} = T_{i,r} - T_{i,r-1}$

- 引理 2.4.1: $X_0 = i$, $(G_{i,1}, S_{i,1}), (G_{i,2}, S_{i,2}), \cdots$ i.i.d 随机向量列

- 命题 2.2.2: $P_\mu(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=j\}}\,ds = \frac{1}{q_j E_j G_j}) = 1$. 访问频率

(1) 假设 $\mu = i$, 强大数律: $P_i(\lim_{r\to\infty} \frac{T_{i,r}}{r} = E_i G_i) = 1$

$\forall t > 0$, $M_t = \sup\{r \geq 0 : T_{i,r} \leq t\}$

$\Rightarrow T_{i,M_t} \leq t < T_{i,M_t+1}$.

$\Rightarrow t\to\infty$ 时, $\frac{t}{M_t} \to E_i G_i$

又 $S_m = \sum_{r=1}^{m} S_{i,r}$. 强大数律: $P(\lim_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} = E S_{i,1}) = 1$

且 $S_{M_t} \leq \int_0^t 1_{\{X_s=j\}}\,ds \leq S_{M_t+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{M_t}\int_0^t 1_{\{X_s=j\}}\,ds \xrightarrow{t\to\infty} E S_{i,1} = \frac{1}{q_j}$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=j\}}\,ds = \frac{M_t}{t}\cdot\frac{1}{M_t}\int_0^t 1_{\{X_s=j\}}\,ds \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{q_j E_j G_j}$

(2) 对初分布 μ, 令 $Y_s = X_{\tau_i+s}$. 则 $\{Y_s\}$ 是从 i 出发的跳过程.

$\Rightarrow P(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{Y_s=j\}}\,ds = \frac{1}{q_j E_j G_j}) = 1$

由 $\int_0^t 1_{[X_s=i]}\,ds = \int_{\tau_i}^t 1_{[X_s=i]}\,ds = \int_0^{t-\tau_i} 1_{[\theta_s=i]}\,ds$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t 1_{[X_s=i]}\,ds = \lim_{t\to\infty}\frac{t-\tau_i}{t}\cdot\frac{1}{t-\tau_i}\int_0^{t-\tau_i} 1_{[\theta_s=i]}\,ds = \frac{1}{q_i\sigma_i\sigma_i}$

- 定义2.4.3：$\sigma_i\sigma_i<\infty$，称 i 正常返

  i 常返且 $\sigma_i\sigma_i=\infty$，称 i 零常返.

  给定0，0正常返 $\Rightarrow \frac{1}{t}\int_0^t 1_{[X_s=i]}\,ds \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\sigma_0\int_0^{\sigma_0} 1_{[X_t=i]}\,dt}{\sigma_0\sigma_0}$ 分划为游式

  令 $\mu_i = \sigma_0\int_0^{\sigma_0} 1_{[X_t=i]}\,dt \Rightarrow \mu_i = \sigma_0\sigma_0\cdot q_i\sigma_i\sigma_i$

  令 $\hat{\mu}_i = \sigma_0\sum_{n=0}^{\hat{\sigma}_0-1} 1_{[\hat{X}_n=i]} \Rightarrow \mu_i = \frac{1}{q_i}\hat{\mu}_i$

  注：$\sum\hat{\mu}_i<\infty$ 和 $\sum\mu_i<\infty$ 互相推不出

  $\Rightarrow \{\hat{X}_n\}$ 和 $\{X_t\}$ 的正常返不存在对应！

- 引理2.4.5：Q不可约，常返，则 $\forall i\in S$，$t,s>0$，$\forall j\in S$，　强马氏性

  $P_i(X_{t+s}=j,\ t<\sigma_i) = P_{ij}(s)\,P_i(X_t=j,\ t<\sigma_i)$

  $LHS = \sum_{n,m=0}^{\infty}\ \sum_{\substack{i_0=i,i_1,\cdots,i_n=j,\\ i_{n+1},\cdots,i_{n+m}=i,\\ i_r\neq i,\ r=1,2,\cdots,n-1}} P_i(S_n\le t<S_{n+1},\ \hat{X}_1=i_1,\cdots,\hat{X}_n=i_n,$

  $S_{n+m}\le t+s<S_{n+m+1},\ \hat{X}_{n+1}=i_{n+1},\cdots,\hat{X}_{n+m}=i_{n+m})$

  $= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{\substack{i_0=i,i_1,\cdots,i_n=j\\ i_r\neq i,\ r=1,2,\cdots,n-1}} P_i(S_n\le t<S_{n+1},\ \hat{X}_1=i_1,\cdots,\hat{X}_n=i_n)\cdot$

  马氏性 $\sum_{i_{n+1},\cdots,i_{n+m}=i} P_j(S_m\le s<S_{m+1},\ \hat{X}_1=i_{n+1},\cdots,\hat{X}_m=i_{n+m}=i)$

  $= P_{ij}(s)\,P_i(X_t=j,\ t<\sigma_i)$

- 命题2.4.6：Q不可约，常返，$\forall s>0$，$i\in S$，$\sum_{j\in S}\mu_j P_{ji}(s)=\mu_i$

  0常返，$P_0(\sigma_0<\infty)=1$

  $\{X_{\sigma_0+t}:\ t\ge 0\}$ 是从0出发，Q为转移速率矩阵的跳过程.

$$E_0\int_0^S 1_{\{X_t=j\}}dt = E_0\int_0^S 1_{\{X_{\sigma_0+t}=j\}}dt = E_0\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+S} 1_{\{X_t=j\}}dt$$

$$\Rightarrow E_0\int_S^{\sigma_0+S} 1_{\{X_t=j\}}dt = E_0\int_0^{\sigma_0} 1_{\{X_t=j\}}dt = \mu_i$$

$$\text{而 } E_0\int_S^{\sigma_0+S} 1_{\{X_t=j\}}dt = E_0\int_0^{\sigma_0} 1_{\{X_{t+S}=j\}}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} P_0(X_{t+S}=j,\ t<\sigma_0)dt$$

$$= \sum_{k\in S}\int_0^{+\infty} P_0(X_{t+S}=j,\ X_t=k,\ t<\sigma_0)dt \quad \text{全概率公式}$$

$$= \sum_{k\in S} P_{kj}(S)\int_0^{\infty} P_0(X_t=j,\ t<\sigma_0)dt \quad \text{用引理}$$

$$= \sum_{k\in S} P_{kj}(S)\,E_0\int_0^{\sigma_0} 1_{\{X_t=j\}}dt = \sum_{k\in S} P_{kj}(S)\,\mu_j$$

- 定义：称 $\{\mu_i\}$ 为不变测度，若 $\sum_{k\in S}\mu_k P_{kj}(S)=\mu_j$

  若 $\{\mu_i\}$ 为不变测度，且 $\sum\mu_i<\infty$，称 $\{\mu_i\}$ 为不变分布

- 定理2.9.8：Q不可约，以下等价：

  (1) 所有状态正常返

  (2) 存在正常返态

  (3) 不变分布存在

  且若满足上述条件，则不变分布 $\pi_i=\frac{1}{q_i E_i\sigma_i}=\frac{\mu_i}{E_0\sigma_0}$

(2)⇒(1)：显然

(1)⇒(3)：0正常返 ⇒ $\sum\mu_i=E_0\sigma_0<+\infty$

(3)⇒(2)：取 $\mu=\pi$，$E_\pi\left(\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=j\}}ds\right)\to\frac{1}{q_i E_i\sigma_i}$

而 $E_\pi\left(\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=j\}}ds\right)=\pi_i \Rightarrow \pi_i=\frac{1}{q_i E_i\sigma_i}$

$\pi_i=\sum_k \pi_k P_{ki}(S)$，且Q不可约 ⇒ $\exists S,\ P_{ki}(S)>0$

⇒ $\pi_i>0,\ \forall i$ ⇒ i正常返 $\forall i$ 只有离散时才讨论周期/非周期

· 假设 Q 不可约常返. 则: 设对 $P_i(S)=\pi_i$ 时 S 非负并令 $S\to 0$

(1) π 是 S 上测度, 则 $\pi Q=0 \Leftrightarrow \exists C,\ \pi_i=C\mu_i,\ \forall i$

(2) π 是 S 上分布, 则 $\pi Q=0 \Leftrightarrow \pi$ 是不变分布.

(1) $\hat{P}_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i},\ j\neq i$

$\pi Q=0 \Leftrightarrow \sum_{j\neq i}\pi_j q_j \hat{P}_{ji}=\pi_i q_i$

$\Leftrightarrow \{\pi_i q_i\}$ 是 $\{\hat{X}_n\}$ 的不变测度.

命题1.8.1 $\Leftrightarrow \exists C,\ \pi_i q_i=C\hat{\mu}_i=C q_i \mu_i$

(2) $\pi Q=0 \Rightarrow \pi_i=C\mu_i \Rightarrow \pi$ 是不变测度.

π 是不变分布. $\Rightarrow \pi_i=\frac{\mu_i}{\sum_j \mu_j} \Rightarrow \pi Q=0$

注: π 是 $\{X_t\}$ 的不变分布 $\Rightarrow \{\pi_i q_i\}$ 是 $\{\hat{X}_n\}$ 的不变测度

$\hat{\pi}$ 是 $\{\hat{X}_n\}$ 的不变分布 $\Rightarrow \{\frac{\hat{\pi}_i}{q_i}\}$ 是 $\{X_t\}$ 的不变测度

例2.4.1: 生灭链 $S=\{0,1,2,\cdots\}$, β_i, δ_i. 嵌入链 b_i, d_i.

$q_i=\beta_i+\delta_i,\ p_i=\frac{\beta_i}{q_i},\ \delta_i=\frac{\delta_i}{q_i}$

(1) $\{\hat{X}_n\}$ 是带反射壁界的SRW, $b_i=d_i=\frac{1}{2}$, $b_0=1$

$\Rightarrow \{\hat{X}_n\}$ 零常返. 不变测度: $\mu_0=1,\ \mu_i=\frac{1}{\delta_1},\ \forall i\geq 1$

解方程 $\pi Q=0 \Rightarrow \pi_i=\pi_0\frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{i-1}}{\delta_1\cdots\delta_i}=2\pi_0\frac{q_0}{q_i}$

取 $q_0=1$, $q_i=\delta_i$, 则 $\{X_t\}$ 正常返.

(2) $\{\hat{X}_n\}$ 正常返, 不变分布为 $\hat{\pi}$, 取 $q_i=\hat{\pi}_i$

$\Rightarrow \pi Q=0 \Leftrightarrow \pi_i \propto \frac{\hat{\pi}_i}{q_i}=1 \Rightarrow \{X_t\}$ 零常返.

2.5 逆过程与可逆分布

$\{X_t\}$，转移速率矩阵 Q 不可约、正常返、不变分布 π，$X_0 \sim \pi$

令 $\hat{q}_{ij} = \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i}$，$\hat{Q} = [\hat{q}_{ij}]$，则：$\pi Q = 0 \Rightarrow \pi \hat{Q} = 0$

令 $\hat{q}_{ij} \triangleq \frac{q_{ji}}{q_i} = \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i q_i}$ 为逆过程加嵌入链的转移矩阵.

令 $\hat{\pi}_i = \pi_i q_i$，则 $\hat{q}_{ij} = \frac{\hat{\pi}_j p_{ji}}{\hat{\pi}_i}$

$T > 0$，$Y_0 \triangleq X_T$，$Y_t \triangleq X_{(T-t)-}$，称 $\{Y_t\}$ 为逆过程 方向右极

· 命题 2.5.1：$\{Y_t\}$ 是跳过程，转移速率矩阵为 $\hat{Q}$

易见 $\{Y_t\}$ 是跳过程.

$t > s$，初分布 π，$P(Y_{(t)} = j \mid Y_{(s)} = j) = P(X_{(T-t)} = j \mid X_{(T-s)} = j)$

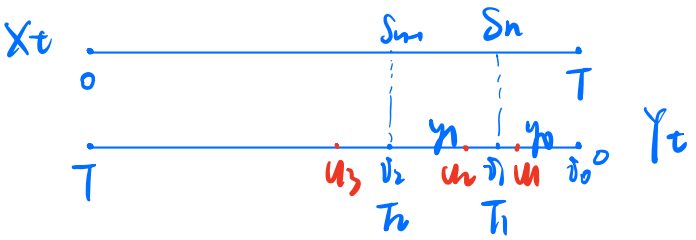
$$= \frac{P(X_{(T-t)} = j,\ X_{(T-s)} = j)}{P(X_{(T-s)} = j)} = \frac{\pi_j P_{ji}(t-s)}{\pi_i}$$

令 $s = 0$，则 $\hat{P}_{ij}(t) = \frac{\pi_j P_{ji}(t)}{\pi_i}$

对 t 求导并令 $t \to 0 \Rightarrow \hat{q}_{ij} = \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i}$

记：$\{Y_t : 0 \le t \le T\}$ 的跳跃总次数为 N_Y.

嵌入链：$\hat{Y}_0, \hat{Y}_1, \cdots$，跳跃时间：$T_1, T_2, \cdots$



$T_1 = T - S_n$

$T_2 = T - S_{n-1}$

$N_Y = 0$ ✓

$N_Y = n \ge 1$.

$\forall 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1} = T$.

令 $\Delta_Y = \{(y_0, \cdots, y_{n-1}) : u_r < t_r < u_{r+1},\ r = 1, \cdots, n,\ \text{其中 } t_r = y_0 + \cdots + y_{r-1}\}$

$\Delta_X = \{(x_0, \cdots, x_{n-1}) : T - u_{n+2-r} < s_r < T - u_{n+1-r},\ r = 1, 2, \cdots, n,$

$\text{其中 } s_r = x_0 + \cdots + x_{r-1}\}$

$\Rightarrow \{N_Y = n, (T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1}) \in \Delta_Y\}$

$= \{N_X = n, (S_1, S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}) \in \Delta_X\}$

$\Rightarrow \forall i_1, \cdots, i_n \in S, P(\hat{Y}_0 = i_0, \cdots, \hat{Y}_n = i_n, N_Y = n, (T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1}) \in \Delta_Y)$

$= P(\hat{X}_0 = i_n, \cdots, \hat{X}_n = i_n, N_X = n, (S_1, S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}) \in \Delta_X)$

令 $Y_0 = T - S_n$, $Y_1 = X_{n+1}, \cdots, Y_{n+1} = X_1$

代入计算即得.

· 定义: π 为不变分布 且 $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$, $\forall i, j$.

则称 π 为 Q 的可逆分布.

注: $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \Rightarrow \pi Q = 0$ 即 π 为不变分布 (反例: 例2.6.1)

与推论 2.4.9 不矛盾: Q 不一定常返

· 例2.5.4: $M/M/1$: $\{X_n\}$ 为可逆链 生灭链一定可逆(环条件)

$\Rightarrow$ 离开顾客也为速率 λ 的泊松流

$\Rightarrow$ 两个服务台用: 第二个队伍也是 $M/M/1$

2.6* 连续时间马氏链

· 结论1:
$$\begin{cases} P(t)P(s) = P(t+s) \\ P(0) = I \\ P(t) \xrightarrow{t \to 0} I \end{cases} \Rightarrow Q \triangleq P'(t)$$

· 结论2: Q 非爆炸, 保守 $\Rightarrow$ 跳链 Gillespie 算法

骨架链: $\{X_{nt} : n \geq 0\}$.

停留时间 $P_i(\tau > t) = \lim_{n\to\infty} P_i(X_{\frac{k}{n}} = i,\ 1 \le k \le n)$

服从指数分布

$= \lim_{n\to\infty} (P_{ii}(\frac{t}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} (1 - q_i \frac{t}{n})^n = e^{-q_i t}$

跳跃时间与 $P_i(\tau = t,\ X_\tau = j) = \lim_{n\to\infty} (P_{ij}(\frac{t}{n}))^{n-1} \cdot P_{ij}(\frac{t}{n}) = e^{-q_i t} q_{ij} \frac{t}{n}$

嵌入链独立.

轨道 $\leftrightarrow$ 分布

第三章 布朗运动

地位：布朗运动 $\longleftrightarrow$ 连续时间连续空间马尔可夫过程

鞅过程 $\longleftrightarrow$ 跳过程

· 定义：$n \ge 1$，$0 \le t_1 < \cdots < t_{n-1} < t$，$s > 0$.

$P_{X_{s+t} | (X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_{n-1}}, X_t)}(y | (x_1, \cdots, x_{n-1}, x))$ 只依赖于 x, y, s （条件密度）

则称 $\{X_t\}$ 为时齐马氏过程.

P_x：从 x 出发，则 $P_\mu(A) = \int P_x(A) \rho(x)\, dx$，初分布 $\mu \sim \rho(x)$

有限维联合密度：

$P_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n) = P_{t_1}(x, x_1) P_{t_2 - t_1}(x_1, x_2) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)$

3.1 高斯分布与高斯过程.

n 维正态：$N(\vec{m}, \Sigma)$，Σ 正定，联合密度 $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m}) \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{m})^T}$

n 维高斯分布：Σ 半正定，$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = E e^{i \vec{t} \vec{X}} = e^{i \vec{m} \vec{t} - \frac{1}{2} \vec{t} \Sigma \vec{t}^T}$

独立 $\Leftrightarrow$ 不相关.

· 定义 $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ 称为 高斯系 / 过程，

若 $\forall n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$，$(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n})$ 高斯.

· 命题3.1.2：$\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ 高斯系，$I_1, \cdots, I_n \subseteq I$ 互不相交.

记 $\vec{X_r} = \{X_\alpha : \alpha \in I_r\}$，

若 $\mathrm{cov}(X_\alpha, X_\beta) = 0$，$\forall r \neq s$，$\alpha \in I_r$，$\beta \in I_s$，

则：$\vec{X_1}, \vec{X_2}, \cdots, \vec{X_n}$ 相互独立.

· 命题3.1.3：$\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ 高斯系，J 指标集.

$\forall \beta \in J$，$\exists c_1, \cdots, c_n$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，

s.t. $Y_\beta = c_1 X_{\alpha_1} + \cdots + c_n X_{\alpha_n}$

则：$\{Y_\beta : \beta \in J\}$ 高斯系

3.2 布朗运动定义与构造

一. 定义

X_t：时刻 t 的位移，齐向同性关于 t 连续.

$X_{t+s} - X_t$ 与 X_t 独立，$X_{t+s} - X_t \triangleq X_s$

· 定义：$B_0 = 0$，$\forall t \geq 0$，$s > 0$，$n \geq 2$，$\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n$，

(B_1) $B_{t+s} - B_t \sim N(0, s)$

(B_2) B_{t_1}，$B_{t_2} - B_{t_1}$，$\cdots$，$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立 } 独立平稳增量

(B_3) 轨道连续.

称 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动 B.M

$\{X_t = x + \sigma B_t\}$ 为一维布朗运动 B.M

· 命题3.2.2：任意有限维联合分布.

· 命题3.2.3：$\{B_t\}$ 马氏过程，$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$

- $EB_t=0$, $EB_t^2=t$

  $t\le s$, $EB_tB_s=E[B_t(B_s-B_t+B_t)]=EB_t^2=t$

- 命题3.2.4：若：(1) $\{X_t\}$ 高斯过程

  (2) $EX_t=0$, $EX_tX_s=t\wedge s$

  (3) 轨道连续

  则：$\{X_t\}$ 是 B.M.

  (B_1), (B_2) $\Leftrightarrow$ (1), (2)

例3.2.5：(尺度变换)

$c>0$, $X_t\triangleq\frac{1}{c}B_{c^2t}$, $t\ge0$, 则 $\{X_t\}$ 为标准 B.M.

$EX_tX_s=\frac{1}{c^2}(c^2t\wedge c^2s)=t\wedge s$

例3.2.6：$W_t=\begin{cases}tB_{\frac{1}{t}}, & t>0\\ 0, & t=0\end{cases}$ 为 B.M.

$\{W_t\}$ 为高斯过程, $EW_t=0$

$EW_tW_s=\begin{cases}0, & t=0\\ E(tB_{\frac{1}{t}}\cdot sB_{\frac{1}{s}})=ts(\frac{1}{t}\wedge\frac{1}{s})=t\wedge s, & t>0\end{cases}$

轨道连续：推论3.4.9

- 设 $\{B_t^{(1)}\}$, $\cdots$, $\{B_t^{(d)}\}$ 为相互独立的 B.M. B.M. 各维度独立，

  $\vec{B}_t=(B_t^{(1)},B_t^{(2)},\cdots,B_t^{(d)})$ 称为 d 维 B.M. S.R.W. 各维度不独立

· 命题：$\vec{X}_t = A\vec{B}_t$，A 正交 $\Rightarrow \{\vec{X}_t\}$ 为 d 维 B.M. 各向同性.

$$E X_t^{(i)} X_s^{(j)} = 1_{\{i=j\}}\, t\wedge s$$

例：(习题 3.2-5, 6)

格林函数 $G(\vec{x},\vec{y}) = C\int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{c}{t}} dt = C\int_0^\infty s^{\frac{d}{2}-2} e^{-cs}\, ds$

$\sim \int_0^1 s^{\frac{d}{2}-2} ds$ 只在 0 处可能发散

$\Rightarrow$ $d=1$ $\sim s^{-\frac{1}{2}} \to +\infty$

$d=2$ $\sim \log s \to +\infty$ 没有"点常返"，但有"区间常返"

$d=3$ $\sim s^{\frac{d}{2}-1} < +\infty$

C-K 等式：$P_{t+s}(\vec{x},\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} P_t(\vec{x},\vec{z})\, P_s(\vec{z},\vec{y})\, d\vec{z}$

Kolmogorov 前进/后退方程：

$$\frac{\partial P_t(\vec{x},\vec{y})}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_{\vec{y}} P_t(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\Delta_{\vec{x}} P_t(\vec{x},\vec{y})$$

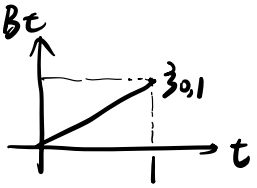
前进　后退　热方程

二. 构造 (Levy 1930-1940s)

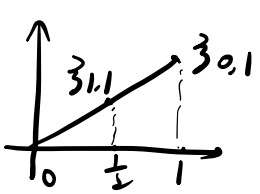
· 引理 3.2.9：$X \sim N(0,\sigma^2)$，$\tilde{X}$ 与 X i.i.d.

则：$Y = \frac{1}{2}(X+\tilde{X})$，$Z = \frac{1}{2}(X-\tilde{X}) \overset{i.i.d}{\sim} N(0,\frac{\sigma^2}{2})$

取 $\xi_{0,1} \sim N(0,1)$，$B_t^{(0)}$：



取 $\xi_{1,1} = \frac{1}{2}(\xi_{0,1}+\tilde{\xi}_{0,1})$，$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}(\xi_{0,1}-\tilde{\xi}_{0,1})$，$B_t^{(1)}$：



依此类推可构造 $B_t^{(n+1)}$：$\xi_{n+1,2k-1} = \frac{1}{2}(\xi_{n,k}+\tilde{\xi}_{n,k})$，$\xi_{n+1,2k} = \frac{1}{2}(\xi_{n,k}-\tilde{\xi}_{n,k})$

$$B_{\frac{k}{2^{n+1}}} = \xi_{n+1,1} + \cdots + \xi_{n+1,k}$$

则：$\xi_{n+1,i} = B_{\frac{i}{2^{n+1}}} - B_{\frac{i-1}{2^{n+1}}} \sim N(0,\frac{1}{2^{n+1}})$

取 $B_t^{(n)} = B_{\frac{k}{2^n}} + 2^n(t-\frac{k}{2^n})\xi_{n,i}$, $t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$

$D_n \triangleq \max_{0\le t\le 1}|B_t^{(n+1)} - B_t^{(n)}| = \frac{1}{2}\max_{1\le i\le 2^n}|\tilde{\xi}_{n,i}|$

$A_n \triangleq \{\max_{1\le i\le 2^n}|\tilde{\xi}_{n,i}| > 2^{-\frac{n}{4}}\sqrt{n}\}$

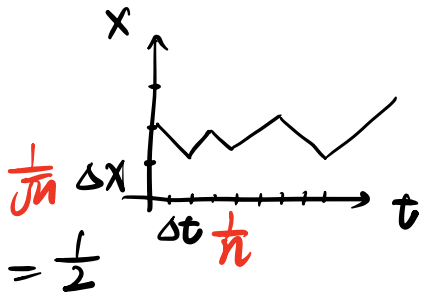
$\Rightarrow P(A_n) \le 2^n P(\tilde{\xi}_{n,1} > 2^{-\frac{n}{4}}\sqrt{n}) \le 2^n\cdot\frac{E\xi^6}{2^{\frac{3n}{2}}\cdot n^3}$, 其中 $\xi\sim N(0,1)$.

$\Rightarrow \sum P(A_n) < \infty$

$\Rightarrow$ 由B-C引理: $P(A_n, i.o) = 0$

$\Rightarrow P(B_t^{(n)} \rightrightarrows B_t) = 1$

3.3 不变原理



$\{S_n\}$ 一维 S.R.W.

$S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$

$\forall m\ge 0$, $S_{m+r} = (1-r)S_m + rS_{m+1}$, $0<r<1$.

取 $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{nt}$, 则: $\{S_t^{(n)}\}_{0\le t\le 1} \xrightarrow{d} \{B_t\}_{0\le t\le 1}$

*结论: $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有界连续, $Ef(X_n)\to Ef(X)$.

定义: $d_T(\varphi,\psi) = \max_{0\le t\le T}|\varphi(t)-\psi(t)|$, $\forall \psi,\varphi\in C[0,T]$

则: $(C[0,T], d_T)$ 为完备可分度量空间.

· 定理 3.3.1: $\forall T>0$, $f: C[0,T]\to\mathbb{R}$ 有界连续 直观: 中心极限定理

$$\lim_{n\to\infty} Ef(\{S_t^n : 0\le t\le T\}) = Ef(\{B_t : 0\le t\le T\}).$$

例 3.3.4: $\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{0\le m\le n} S_m \xrightarrow{d} \max_{0\le t\le 1} B_t$.

LHS $= \max_{0\le t\le 1} S_t^{(n)}$, 取 $F: C[0,T]\to\mathbb{R}$, $F(\varphi) = \max_{0\le t\le 1}\varphi(t)$, 则: F 连续、不有界.

$\forall f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 有界连续，则 $f \circ F$ 有界连续.

$\Rightarrow$ 由定理 3.3.1：$E f \circ F(S_t^{(n)}) \to E f \circ F(B_t)$

再用 $*$ 知 $F(S_t^{(n)}) \xrightarrow{d} F(B_t)$. ✓

3.4 布朗轨道的性质

一、首达时

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

$$\tau_a^{(r)} = \inf\{t \geq r : B_t = a\}.$$

· 定理：(强马氏性) $\tau = \tau_a$ 对 $\tau_a^{(r)}$，$\tilde{B}_t = B_{t+\tau} - B_\tau$，

则 $\{\tau < +\infty\}$ 下 $\{\tilde{B}_t : t \geq 0\}$ 是与 τ 独立的 B.M.

· 推论 3.4.2：(反射原理) $\forall a > 0$, $P_0(\tau_a < t, B_t > a) = P_0(B_t > a)$

$$= P_0(\tau_a < t, B_t < a)$$

· 命题 3.4.3：$\forall a > 0$, $P_0(\tau_a < t) = 2P_0(B_t > a)$.

$$p(t) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow E_0 \tau_a = \infty, \ \forall a \neq 0.$$

例 3.4.5 / 3.4.6：$\{\tau_a : a \geq 0\}$ 独立平稳增量，不连续.

尺度变换：$\{\hat{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}\}$ B.M.

$$\hat{\tau}_a = \inf\{t : \hat{B}_t = a\} = \inf\{t : B_{c^2 t} = ca\} = \frac{1}{c^2}\tau_{ca}$$

$$\{\tfrac{1}{c^2}\tau_{ca}\} = \{\hat{\tau}_a\} \overset{d}{=} \{\tau_a\}.$$

二. 最大值

$M_t = \max_{0\le s\le t} B_s$

· 命题 3.4.7: M_t 为连续型随机变量, $M_t \overset{d}{=} |B_t|$.

$P_0(M_t \ge a) = P_0(T_a \le t) = P_0(|B_t| \ge a)$, $\forall a \ge 0$.

$\Rightarrow P_0(M_t = 0) = 0$ $\Rightarrow$ 最大值 M_t 不会在端点取到,

只在内部 $(0,t)$ 取到.

· 推论 3.4.8: $\forall t > 0$, $P_0(\exists u, v \in (0,t),\ u \ne v,\ \text{s.t. } B_u = B_v = M_t) = 0$

$A_r = \{\exists u < r < v < t,\ \text{s.t. } B_u = B_v = M_t\}$

$\hat{B}_s = B_{r+s} - B_r$, $\tilde{B}_s = B_{s+r} - B_r$, 则 $\{\hat{B}_s\}$ 与 $\{\tilde{B}_s\}$ 独立

$P_0(A_r) = P_0(\hat{M}_r = \tilde{M}_{t-r}) = 0$, $\{\cdots\} \subset \bigcup_r A_r$

$\Rightarrow P(\cdots) = 0$ 独立的连续型随机变量

· 推论 3.4.9: $P_0(\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0) = 1$

强大数律 $\Rightarrow \frac{B_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$

$\forall n \ge 1$, $X_n = \sup_{n\le t\le n+1}(B_t - B_n)$, $Y_n = \sup_{n\le t\le n+1}(B_t - B_n)$

则: $X_0, X_1, \cdots$ i.i.d $\sim M_1 \overset{d}{=} |B_1| \Rightarrow EX_n < \infty$

$Y_0, Y_1, \cdots$ i.i.d $\sim M_1 \overset{d}{=} |B_1| \Rightarrow EY_n < \infty$.

由推论 0.3.2: $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$, $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$

对 $t \in [n]$, $|B_t| \le |B_n| + X_n + Y_n$.

三. 轨道性质

· 命题 3.4.10: $P_0(\forall a < b,\ B_t \text{ 在区间上不是单调的}) = 1$.

$r<s$, $A_{r,s}=\{B_t$ 在 $[r,s]$ 单调$\}$

$P_0(\exists a<b, B_t$ 在 $[a,b]$ 单调$) \le P_0\left(\bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ 0\le r<s}} A_{r,s}\right) \le \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ 0\le r<s}} P_0(A_{r,s})$

$\because P_0(A_{r,s}) \le \frac{2}{2^n} \to 0$ 将 $[r,s]$ n 等分.

·命题3.4.11：B.M.轨道以概率1处处不可微

φ 为 $[0,1]$ 上函数. $A=\{[0,1]\to\mathbb{R}$：连续、处处不可微$\}$ 不一定可测.

$\varphi'(t_0)$ 存 $\Rightarrow \exists M>0, \delta>0$, s.t. $|\varphi(t)-\varphi(t_0)| \le M|t-t_0|, \forall t\in[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

$\Rightarrow \forall n > \frac{4}{\delta} \triangleq N$, $\exists\, 0\le k\le n-3$,

s.t. $\left|\varphi\left(\frac{k+i}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k+i-1}{n}\right)\right| \le \frac{8M}{n}$, $i=1,2,3$

记 $\left\{\left|\varphi\left(\frac{k+i}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k+i-1}{n}\right)\right| \le \frac{8M}{n}, i=1,2,3\right\} = A_{n,k}$

则 $\{\exists$ 可微点$\} \subset \bigcup_{M\ge1}\bigcup_{N\ge1}\bigcap_{n\ge N}\bigcup_{k\ge0}^{n-3} A_{n,k} \triangleq B$. 概率为1处处不可微的含义：$B^c\subseteq A$ 且 B^c 可测, $P(B^c)=1$

只需证：$P_0\left(\bigcup_{k\ge0}^{n-3} A_{n,k}\right)\to 0$, $n\to+\infty$.

而 $P(A_{n,k}) = [P(\frac{1}{\sqrt{n}}|Z| \le \frac{8M}{n})]^3 = [P(|Z|\le \frac{8M}{\sqrt{n}})]^3 \le (\frac{8M}{\sqrt{n}})^3$

故 $P_0\left(\bigcup_{k\ge0}^{n-3} A_{n,k}\right) \le \sum_{k\ge0}^{n-3} P_0(A_{n,k}) \le n\cdot(\frac{8M}{\sqrt{n}})^3 \to 0$

· α-Hölder 连续：$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^\alpha}$ 存在. 记为 C^α, $0<\alpha<1$.

Kolmogorov criterion：$\{X_t\}$, 若 $\exists\, E|X_s-X_t|^\alpha \le (t-s)^{1+\beta}$,

则：γ-hölder 连续, $\forall\, \alpha<\gamma<\frac{\beta}{\alpha}$.

B.M.：$\forall \alpha>2$, $\beta=\frac{\alpha}{2}-1$. $\Rightarrow$ B.M. 轨道：$C^{\frac{1}{2}-}$

四. 零点 第一个零点取不出来

$[0,t]$ 上最后一个零点 L_t, $B_{L_t}=0$.

$L_t = \sup\{s \le t : B_s = 0\}$ $\{B_t\}$ 连续 $\Rightarrow$ 可以取到 sup.

- 命题 3.4.14 (反正弦律) $\forall t \ge s \ge 0$, $P_0(L_t \le s) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}$

$$p(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}, & s \in (0,t) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \Rightarrow P(L_t = 0) = 0, \ \forall t > 0$$

$$P_0(L_t \le s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_s(0,x) P_0(\tilde{\tau}_x > t-s)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P_s(0,x) P_0(\tilde{B}_{t-s} \le |x|)\, dx$$
$$= P_0(|\tilde{B}_{t-s}| \le |B_s|) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}$$

- 推论 3.4.15: $G_0 = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$, 则: $P_0(G_0 = 0) = 1$.

$\forall n \ge 1$, $P_0(0 < L_{t_n} < t_n) = 1$

$\{G_0 = 0\} \supseteq A = \bigcap_n \{0 < L_{t_n} < t_n\}$.

注: $P_0(G_0 \le t) = P_0(L_t > 0) = 1$. $\forall t > 0$.

- $Z = \{t \ge 0 : B_t = 0\}$ 零点集, 则: Z 为闭集. 由 $\{B_t\}$ 连续.
- 定义 3.4.17: $D \subseteq \mathbb{R}$ 为闭集, $\forall t \in D$, $\exists t_1, \cdots, t_n, \cdots \in D \setminus \{t\}$.

s.t. $t_n \to t$, 则 D 为完全集.

注: $D' = \{t \in \mathbb{R} : \exists t_n \in D \setminus \{t\}$, s.t. $\lim_{n\to\infty} t_n = t\}$

闭: $D' \subseteq D$, 完全: $D' = D$

- 推论 3.4.18: $P_0(Z$ 是完全集$) = 1$.

只需证: $Z \subseteq Z'$, 即: $\forall t \in Z$, $\exists \{t_n\} \subseteq Z \setminus \{t\}$, $t_n \to t$

$Z = \{0\} \cup \{C_-\} \cup \{C_+\}$, 则 $0 \in Z'$.

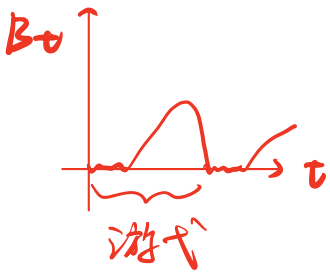
$C_- = \{t \geq 0 : \exists \{t_n\} \subseteq Z \cap [0,t),\ t_n \to t\}$，则 $C_- \subseteq Z$.

$C_+ = \{t \geq 0 : B_t = 0$ 且 $\exists \delta > 0$ s.t. $B_s \neq 0,\ \forall s \in (t-\delta, t)\}$

$\tau_0^{(r)} := \inf\{s \geq r : B_s = 0\}$.

则 $C_+ \subseteq \{\tau_0^{(r)} : r \in \mathbb{Q}_+\}$

故 $P_0(\tau_0^{(r)} \in Z') \geq P_0(\tau_0^{(r)} = 0)$ 则 ✓



3.3 在整理论 概率论 $\longleftrightarrow$ (Laplace 算子下的) pde

一. 一维情形.

$a \leq x \leq b$, $\tau = \min\{\tau_a, \tau_b\}$

· 命题 3.3.1: $P_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{x-a}{b-a}$, $a \leq x \leq b$.

则 $\varphi(x) = P_x(\tau_b < \tau_a)$.

设 $\delta > 0$ 使 $a \leq x-\delta < x < x+\delta \leq b$, $\sigma = \tau_{x-\delta} \wedge \tau_{x+\delta}$

$P_x(B_\sigma = x+\delta) = P_x(B_\sigma = x-\delta) = \frac{1}{2}$

而 $\sigma \leq \tau$. 则 $\widetilde{B}_t = B_{\sigma+t}$. $\tau_a = \sigma + \hat{\tau}_a$, $\tau_b = \sigma + \hat{\tau}_b$.

$\Rightarrow \varphi(x) = P_x(B_\sigma = x+\delta) P(\tau_b < \tau_a \mid B_\sigma = x+\delta)$

$+ P_x(B_\sigma = x-\delta) P(\tau_b < \tau_a \mid B_\sigma = x-\delta)$

$= \frac{1}{2} P(\hat{\tau}_b < \hat{\tau}_a \mid B_\sigma = x+\delta) + \frac{1}{2} P(\hat{\tau}_b < \hat{\tau}_a \mid B_\sigma = x-\delta)$

$= \frac{1}{2}(\varphi(x+\delta) + \varphi(x-\delta))$ φ 可导性未知

且 $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. 若 φ 光滑, 则 $\varphi''(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{x-a}{b-a}$ 对所有 $[a,b]$ 分点成立

而 $x < y$ 时, $\varphi(x) = P_x(\tau_y < \tau_a)\varphi(y) \leq \varphi(y)$ $\Rightarrow$ 单调.

取 $\varphi(x) = \frac{x-a}{b-a}$

· 推论 3.5.4: (Wald equality) $E_x B_\tau = x$ $f(x)=x$, $x=a$ 或 b

作势理论: $\varphi(x) = E_x f(B_\tau) = ?$

· 命题 3.5.6: (Wald second equality) $E_x (B_\tau - x)^2 = E_x \tau$ $g(x)\equiv 1$

$\Rightarrow E_x \tau = (x-a)(b-x)$.

· 命题 3.5.8: $D=[a,b]\subsetneq \mathbb{R}$, $\tau = \tau_{\partial D}$, $x\in D$.

(1) $\varphi(x) = E_x f(B_\tau)$ f 定义域: ∂D (不需连续)

则: $\begin{cases} \varphi''(x)=0, & \forall x\in(a,b) \\ \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in(a,b)}} \varphi(y) = f(x), & x=a \text{ 或 } b. \end{cases}$

反之有: $\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x+\delta) + \frac{1}{2}\varphi(x-\delta)$

(2) $\psi(x) = E_x \int_0^\tau g(B_t)\,dt$, g 有界连续, g 定义域: D.

则 $\begin{cases} \psi''(x) = -2g(x), & x\in(a,b). \\ \lim\limits_{y\to x} \psi(y) = 0, & x\in\{a,b\}. \end{cases}$

$\delta_\delta = \min\{\delta_{x-\delta}, \delta_{x+\delta}\}$

$\psi(x) = E_x \int_0^{\delta_\delta} g(B_t)\,dt + \frac{1}{2}\psi(x-\delta) + \frac{1}{2}\psi(x+\delta)$

即 $\psi(x-\delta)+\psi(x+\delta)-2\psi(x) \approx \delta^2\psi''(x)$

$-2E_x\int_0^{\delta_\delta} g(B_t)\,dt \approx -2g(x)E_x\delta_\delta = -2g(x)\delta^2$

· 若 $g(x)=\delta\{x=y\}$, 记 $\psi(x)=G(x,y)$

则: $\frac{1}{2}G''(x,y) = -\delta\{x=y\}$

pde 中结果: $\frac{1}{2}\psi''(x) = -g(x)$ 有解为 $\varphi(x)=\int_D G(x,y)g(y)\,dy$

即: $G(x,y) = E_x\int_0^\tau \delta\{B_t=y\}\,dt$

$\Rightarrow$ 由 Fubini: $\varphi(x) = E_x \int_0^\tau g(B_t)\,dt$

· 若 $g(x) = 1_{\{x \in D_0\}}$, $D_0 \subseteq D$

$G(x,y) = E_x \int_0^\tau 1_{\{B_t = y\}}\,dt$ 为格林函数

$\Rightarrow E_x \int_0^\tau g(B_t)\,dt = \int_{D_0} G(x,y)\,dy$

格林函数是一个密度函数

二. 高维情形

$D \subset \mathbb{R}^d$, $\tau = \tau_{\partial D}$.

$f: \partial D \to \mathbb{R}$ 连续 (分段连续)

$g: D \to \mathbb{R}$ 有界连续 (分段连续)

· 命题 3.5.11: $\varphi(\vec{x}) = E_{\vec{x}} f(\vec{B}_\tau)$, $\psi(\vec{x}) = E_{\vec{x}} \int_0^\tau g(\vec{B}_t)\,dt$

$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, 则: $\begin{cases} \Delta \varphi(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in D \\ \lim\limits_{y \in D, \vec{y} \to \vec{x}} \varphi(\vec{y}) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in \partial D. \end{cases}$

$\begin{cases} \Delta \psi(\vec{x}) = -2g(\vec{x}), & \vec{x} \in D. \\ \lim\limits_{y \in D, \vec{y} \to \vec{x}} \psi(\vec{y}) = 0, & \vec{x} \in \partial D. \end{cases}$

· 例 3.5.14: d 维 B.M. 的常返性.

$\tau_r = \inf\{t \ge 0 : \|\vec{B}_t\| = r\}$

$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \le \|\vec{x}\| \le R\}$

求: $P_{\vec{x}}(\tau_\varepsilon < \tau_R) = E_{\vec{x}} f(B_\tau)$, $f(\vec{y}) = \begin{cases} 1, & \|y\| = \varepsilon \\ 0, & \|y\| = R. \end{cases}$

$\triangleq \varphi(\vec{x}) \triangleq F(s)$, $s = \|\vec{x}\|^2$

记：$P_0(\tau_R<+\infty)$ 为. 往∞的概率 > 往0的概率.

$\Delta\varphi(\vec{x})=0,\ \vec{x}\in D \Rightarrow \varphi F''(z)+2dF'(z)=0$

$G(z)=F'(z) \Rightarrow G(z)=Cz^{-\frac{d}{2}}$

① $d=1$. $\varphi(\vec{x})=\frac{R-\|\vec{x}\|}{R-\varepsilon}$. 前已证：$P_x(\tau_0<\infty)=1$

$(\varepsilon<x<R$ 时，$P_x(\tau_\varepsilon<\infty)=\lim_{R\to\infty}P_x(\tau_\varepsilon<\tau_R)=\lim_{R\to\infty}\frac{R-\|\vec{x}\|}{R-\varepsilon}=1)$

由轨道连续性：概率为1遍历 $\mathbb{R}$ 常返

② $d=2$. $\varphi(\vec{x})=\frac{\ln R-\ln\|\vec{x}\|}{\ln R-\ln\varepsilon}$

$\varepsilon<x<R$ 时，$P_x(\tau_\varepsilon<\infty)=\lim_{R\to\infty}\varphi(\vec{x})=1$ 集合常返

$P_x(\tau_0<\infty)=\lim_{R\to\infty}P_x(\tau_0<\tau_R)$

由 $P_x(\tau_0<\tau_R)\le P_x(\tau_\varepsilon<\tau_R)\xrightarrow{\varepsilon\to0^+}0 \Rightarrow P_x(\tau_0<\infty)=0$

③ $d\ge3$. $\varphi(\vec{x})=\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|^{d-2}}-\frac{1}{R^{d-2}}\right)/\left(\frac{1}{\varepsilon^{d-2}}-\frac{1}{R^{d-2}}\right)$

$\varepsilon<x<R$ 时，$P_x(\tau_\varepsilon<\infty)=\left(\frac{\varepsilon}{\|\vec{x}\|}\right)^{d-2}<1$ 非常返.

· 习题3.5-7：$d\ge3$. $\|\vec{B}_t\|\xrightarrow{a.s.}+\infty$, $t\to+\infty$

固定 k，考虑 τ_n.

$A_n\triangleq[\exists t\in[\tau_n,\tau_{n+1}],\ s.t.\ \|\vec{B}_t\|=k\}$ $P(A_n)=P_k(\tau_k\le\tau_{n+1})$

则 $P(A_n)=\left(\frac{1}{k^{d-2}}-\frac{1}{(n+1)^{d-2}}\right)/\left(\frac{1}{k^{d-2}}-\frac{1}{(n+1)^{d-2}}\right)\le\frac{1}{n^2}/\frac{1}{2k^{d-2}}$

$\Rightarrow \sum P(A_n)<\infty \Rightarrow P(A_n,i.o)=0$ {A_n} 中发生无穷个事件.

$\Rightarrow \{A_n,i.o\}^c\subseteq\{\lim_{t\to\infty}\text{对}\ \|\vec{B}_t\|\ge k\}$

例 3.5.16：$D=[0,1]$, $\tau=\tau_{\partial D}$. $0\le y<z\le1$. $[y,z]\triangleq D_0$.

求 $\varphi(x)=E_x\int_0^\tau 1_{[B_t\in[y,z]]}\,dt$

$\psi''(x) = -2$, $\forall x \in [y, z]$, $\psi''(x) = 0$, 其他.

$\psi(0) = \psi(1) = 0$

$\Rightarrow \psi(x) = \int_y^z p(x,w)\,dw$,

其中 对于 $0 \le u \le w \le 1$, $p(u,w) = p(w,u) = 2u(1-w)$

3.6 布朗桥 和 O-U 过程

一. 布朗桥.

$X_t \triangleq B_t - tB_1$, $0 \le t \le 1$. ★非平不可夫高斯过程.

(BB1) 轨道连续

(BB2) 高斯过程 t不看作时间，看作曲线的参数化.

(BB3.1) $EX_t = 0$

(BB3.2) $\forall s \le t$, $EX_s X_t = E[(B_s - sB_1)(B_t - tB_1)] = s(1-t)$.

满足上述 BB1~3 的称为布朗桥.

- $EX_t B_1 = 0 \Rightarrow X_t$ 与 B_1 不相关

$\{X_t\} \cup \{B_1\}$ 为高斯系 $\Rightarrow X_t$ 与 B_1 独立.

$\Rightarrow \{X_t : 0 \le t \le 1\} \overset{d}{=} \{X_t : 0 \le t \le 1 \mid B_1 = 0\} \overset{d}{=} \{B_t : 0 \le t \le 1 \mid B_t = 0\}$

例: $F(x) = P(X \le x)$, $X_1, X_2, \cdots$ i.i.d $\sim F$

F 右连续.

$1_{\{X_n \le x\}} \sim \text{Bernoulli}(F(x))$

$F_n(x) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} 1_{\{X_m \le x\}}$

SLLN $\Rightarrow P(F_n(x) \to F(x)) = 1$, $\forall x$

CLT $\Rightarrow$ $D_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{d} D(x) \sim N(0, F(x)(1-F(x)))$

事实上，$\{D_n(x) : x \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{d} \{D(x) : x \in \mathbb{R}\}$

$D(x) \triangleq D_x$ 为高斯过程.

$x \le y$ 时，$E D_x D_y = \lim_{n\to\infty} E D_n(x) D_n(y)$

$= \lim_{n\to\infty} n(E F_n(x) F_n(y) - F(x)F(y))$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}(nF(x) + (n^2-n)F(x)F(y)) - nF(x)F(y)\right)$

$= F(x)(1-F(y))$

记 $t = F(x)$，则 $X_t \triangleq D_{F^{-1}(t)} = D_x$，$0 \le t \le 1$ 为 B.B.

$\max_{x\in\mathbb{R}} D_n(x) \xrightarrow{d} \max_{0\le t\le 1} |X_t|$.

一般长度下的 B.B

$\{B_t : 0 \le t \le 1\}$，$\{X_t = B_t - tB_1 : 0 \le t \le 1\}$

$Y_u \triangleq X_u - \frac{u}{t}X_t = B_u - uB_1 - \frac{u}{t}(B_t - tB_1) = B_u - \frac{u}{t}B_t$

是长度为 t 的 B.B. 其中 $0 \le u \le t$　$u \le v$，$\mathrm{cov}(Y_u, Y_v) = \frac{u(t-v)}{t}$

$Z_s \triangleq X_s - \frac{1-s}{1-t}X_t = B_s - sB_1 - \frac{1-s}{1-t}(B_t - tB_1) = B_s - B_t - \frac{s-t}{1-t}(B_1 - B_t)$

是长度为 $1-t$ 的 B.B. 其中 $t \le s \le 1$

事实上，$\{Y_u : 0 \le u \le t\}$ 与 X_t 与 $\{Z_s : t \le s \le 1\}$ 相互独立.

2. O-U 过程

$\alpha \neq 0$，$X_t = e^{-\alpha t} B_{e^{2\alpha t}}$

$X_{s+t} = e^{-\alpha(s+t)} B_{e^{2\alpha(s+t)}}$

$= e^{-\alpha(s+t)} (B_{e^{2\alpha(s+t)}} - B_{e^{2\alpha s}} + B_{e^{2\alpha s}})$

$= e^{-\alpha t} X_s + e^{-\alpha(s+t)}\left(B_{e^{2\alpha(s+t)}} - B_{e^{2\alpha s}}\right)$

记 $Y = e^{-\alpha(s+t)}\left(B_{e^{2\alpha(s+t)}} - B_{e^{2\alpha s}}\right)$,

则 $e^{-\alpha t} X_s$ 与 Y 独立 且 $Y \sim N(0, 1-e^{-2\alpha t})$

$\Rightarrow$ O-U 过程为 平稳、时齐、马氏、高斯过程.

Y 的分布只与 t 有关

转移密度函数：$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2\alpha t})}} e^{-\frac{(y-e^{-\alpha t}x)^2}{2(1-e^{-2\alpha t})}}$

$X_t \sim N(0,1) \Rightarrow N(0,1)$ 为不变分布.

$N(0,1)$ 为可逆分布.

法一：计算得：$\phi(x) q_t(x,y) = \phi(y) q_t(y,x)$

法二：$Y_t \triangleq X_{-t}$

$Y_t = e^{\alpha t} B_{e^{-2\alpha t}} = e^{\alpha t} \frac{W_{e^{2\alpha t}}}{e^{\alpha t}} = e^{-\alpha t} W_{e^{2\alpha t}} \triangleq X_{-t}$

用到 $W_t \overset{d}{=} B_t$

3.7 随机积分与随机微分方程.

一. 随机积分

下取功：对性移所定义

给定 随机过程 $\{f_t\}$，定义其积分：$\int_0^t f_u \, dB_u$

若 f_u 连续可导，上述积分可以定义：

布朗运动轨道几乎处处不可微

$\int_0^t f_u \, dB_u = f_u \cdot B_u \Big|_0^t - \int_0^t B_u \, df_u$

B_u 有个一定的轨道，无随机性，

则 $\sum_{i=1}^{n} f(s_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ 作 ALL 变换为 $\Delta T \to 0$ 时 收敛

注意到：$\left| E\sum (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - t \right| \to 0$

$\Rightarrow E\left|\sum_i (f(s_i) - f(s_{i-1}))(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right|^2$

$= E\sum |f(s_{ij}) - f(s_{ij})|^2 (t_{i+1} - t_i) \to 0$

- 定义：L^2收敛：$\exists!\, X$，$E(X_n - X)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （概率为1也唯一）

难点：f_u 随机、Rough 时怎么定义？

- 定义：I_{t0}：$\int_0^t f_u dB_u \overset{L^2}{=} \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$

假设：　　左端点一些好处：B_{t_i} 与 $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ 独立.

(1) f_t 与 $(B_{t+s} - B_t)$ 独立

(2) f_t 连续

(3) $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E(f_u - f_{t_i})^2 du \xrightarrow{|\Delta|\to 0} 0$ 需要验证.

则：$\exists (X_t)$ 轨道连续，使得 $\sum_{i=1}^{n} f_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \xrightarrow{L^2} X_t \triangleq \int_0^t f_u dB_u$

- 性质：(1) $E\int_0^t f_u dB_u = 0$　L^2收敛 $\Rightarrow L^1$收敛

(2) $E\left(\int_0^t f_u dB_u \cdot \int_0^t g_u dB_u\right) = \int_0^t E(f_u g_u) du$

$\sum f_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) g_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$

$i<j$ 时，$f_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) g_{t_j}$ 与 $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ 独立.

$i=j$ 时，$E\, f_{t_i} g_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = (E f_{t_i} g_{t_i}) \cdot (t_{i+1} - t_i)$

例 3.7.3　f_u：非随机

$\Rightarrow X_t = \int_0^t f_u dB_u$ 为高斯过程. 高斯过程的 L^2 极限是高斯的

$EX_t = 0$，$EX_t X_s = \int_0^t f_u^2 du \triangleq \varphi(t)$，$t \le s$.

设 φ 严格增，记 $\varphi^{-1} \triangleq \psi$

记 $Y_t = X_{\psi(t)}$，则 $EY_t = 0$，$EY_t Y_s = E X_{\psi(t)} X_{\psi(s)} = t$，$t \le s$.

$\Rightarrow \{Y_t\}$ 为 B.M.

例3.3.4: $\int_0^t B_u dB_u = \lim_{n\to\infty} \sum_i B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$

即 $\sum_{i=0}^{n-1} 2B_t(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1}[B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2 - (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2]$

$= B_t^2 - B_0^2 - \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$ 逐项求和

且 $E[\sum(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - t]^2 = \sum E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)]^2$

$= \sum(t_{i+1} - t_i)^2 Var(Z^2) \to 0$

故 $\int_0^t B_u dB_u = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

注: $\lim_{n\to\infty} \sum_i B_{t_{i+1}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{1}{2}(B_t^2 + t)$

Stratonovich: $\int_0^t f_u \circ dB_u \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_{\frac{t_i + t_{i+1}}{2}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$

此时 $\int_0^t B_u \circ dB_u = \frac{1}{2}B_t^2$

二. 随机微分方程

$\{B_t\}$ 不可导 $\Rightarrow$ 随机微分方程本质上非

事实上为随机积分方程.

$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_u dB_u + \int_0^t b_u du$, 其中 σ_u, b_u 是 X_u, u 的函数.

强解: 给定概率空间

弱解: 不给定概率空间, 可自己定义概率空间

随机微分方程: $dX_t = \sigma_t dB_t + b_t dt$

例: $B_t^2 = \int_0^t 2B_u dB_u + \int_0^t 1\, du$

$dB_t^2 = 2B_t dB_t + 1 \cdot dt$

若 dX_t 已知，问：$df(X_t) = ?$　　$df(X_t) = f'(X_t)\,dX_t$ 不成立.

$X_t = B_t$，$f(x) = x^2$

则：$dX_t = dB_t$

$$df(X_t) = dB_t^2 = 2X_t\,dB_t + 1\cdot dt$$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x)\Delta x + \frac{1}{2}\varphi''(x)(\Delta x)^2 + o(\Delta x^2)$$

$$\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \sum(\varphi(B_{t_{i+1}}) - \varphi(B_{t_i}))$$

$$= \sum\left(\varphi'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2}\varphi''(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + o(|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2)\right)$$

$$\to \int_0^t \varphi'(B_u)\,dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_u)\,du$$

由 $\sum_{i=0}^{n}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow{L^2} t$ 知：$(dB_t)^2 = dt$

- Ito 公式：$Y_t \triangleq \varphi(t, X_t)$

则：$$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(dX_t)^2$$

$$dX_t = \sigma_t\,dB_t + b_t\,dt$$

$$(dX_t)^2 = \sigma_t^2\,dt$$

注：Stratonovich 公式：$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\circ dX_t$

能量守恒

例 3.7.6　求解：$dX_t = \sigma\,dB_t - bX_t\,dt$

令 $\varphi(t,x) = e^{bt}x$，$Y_t = \varphi(t, X_t)$

则：$dY_t = e^{bt}(dX_t + bX_t\,dt) = e^{bt}\sigma\,dB_t$

$\Rightarrow Y_t = Y_0 + \sigma\int_0^t e^{bs}\,dB_s$

$\Rightarrow X_t = e^{-bt}Y_t = e^{-bt}X_0 + e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\sigma\,dB_s$，因为 $Y_0 = X_0$

特别地，取 $\alpha>0$，$b=\alpha$，$\sigma=\sqrt{2\alpha}$.

则：$dX_t=\sqrt{2\alpha}\,dB_t-\alpha X_t dt$ 的解为：

$$X_t=e^{-\alpha t}X_0+\sqrt{2\alpha}\,e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha u}dB_u$$

若 $X_0\sim N(0,1)$ 与 $\{B_t\}$ 独立，

则：$EX_t=0$

$$EX_sX_t=e^{-\alpha(t+s)}EX_0^2+2\alpha e^{-\alpha(s+t)}E\left(\int_0^s e^{\alpha u}dB_u\right)^2=e^{-\alpha(t-s)}$$

$\Rightarrow \{X_t\}$ 是 O-U 过程.

- White noise：ξ_u，$E\xi_u=0$，$cov(\xi_u\xi_v)=\sigma^2\mathbb{1}_{[u=v]}$

  $\int_0^t \xi_s\,ds$

  Colored noise

例 3.7.7（Black-Scholes 模型：期权定价）

$$dX_t=X_t(\mu dt+\sigma dB_t)$$

令 $Y_t=\ln X_t\Rightarrow dY_t=\sigma dB_t+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)dt$

$$\Rightarrow Y_t=Y_0+\sigma B_t+(\mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2)t$$

$$\Rightarrow X_t=X_0e^{\sigma B_t+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$