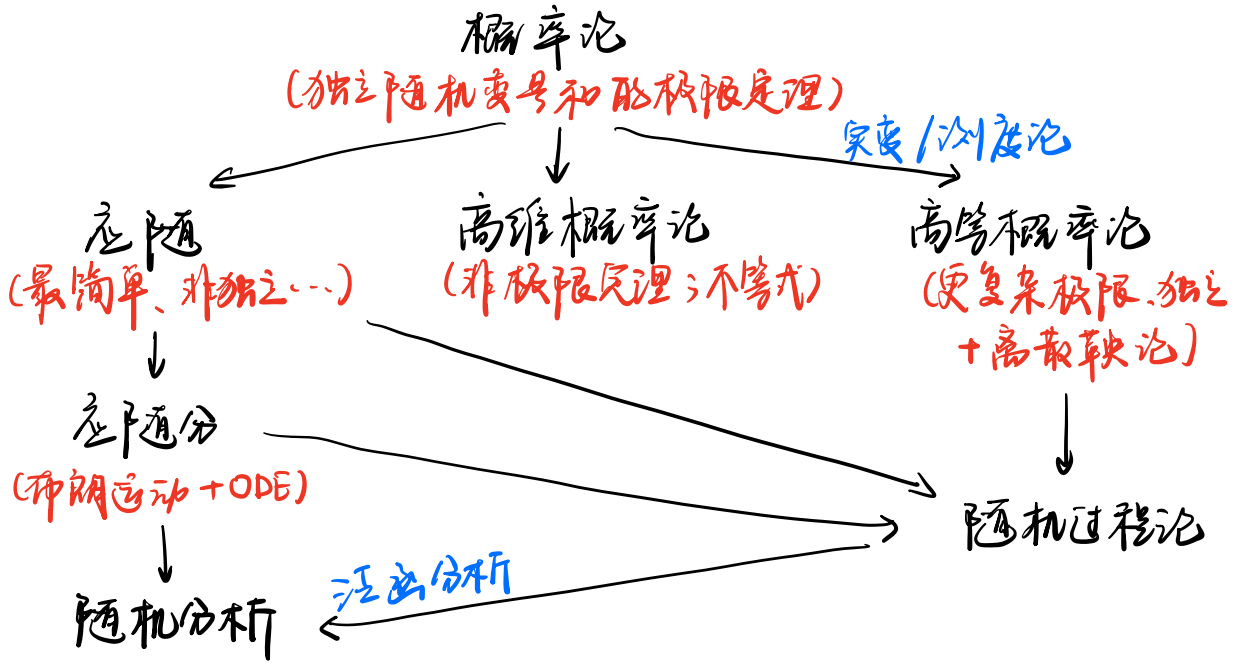
葛颖 综合科研 2号楼 302

作业 20% + 期中 30% + 期末 50%



· 随机过程简史

20C: 独立变量和、马尔科夫链、布朗运动.

从模型/研究方法分类

随机过程的分类:

		离散	连续
一般性理论	存在唯一性	半群/生成元 1940-50s	鞅问题 1970-80s
		渗流	随机积分 1940-50s
		相互作用粒子系统	随机偏微分(非常规) 1980-90s
	其他	鞅论 1940-60s	局部可夫过程极限
		位势理论 1940-60s	

具体问题	可解模型、随机游动、集中不等式	奇异SPDE、热核估计、随机动力系统
	量子/统计物理	相变、随机曲面、SLE, CLE, 随机量子化
		随机 Yang-Mills, 自旋玻璃
	几何代数	随机几何、分形
	化学、生物	聚合物、分支布朗运动
	计算机	随机图论, 算法收敛
研究方法	组合、优化、图论、矩方法	分析 (PDE, 流形、泛函)

无随	离散状态	连续状态
离散时间	第一章	
连续时间	第二章	第三章

0. 预备知识

- 随机过程: $\{X_n\}$, $X_n \in S$

  离散时间: $\{X_n : n \geq 0\} \in S^{\mathbb{Z}_+}$

  连续时间: $\{X_t : t \geq 0\} \in S^{\mathbb{R}_+}$

  如何刻画"无穷维联合分布"?

  → $\{f : f(t) \in S, \forall t \geq 0\}$

- 定义: 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中随机过程 $\{X_n\}$, 指标集 T.

  $\forall$ 有限集 $I = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset T$,

  $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ 的分布 称为 X 的一个 有限维分布

· 定义：$\mathcal{L}=\{\mu_I(\cdot): I\subset T, I\text{有限}\}$ 称为 有限维分布族，
其中 μ_I 为有限维分布

不同的边缘分布是相容的

· Kolmogorow 扩张定理：$\mathcal{L}$ 为相容的有限维分布族，
则 $\exists$ 概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及 随机过程 X，其分布为 $\mathcal{L}$.
唯一确定

注：1. 本课程中随机变量可取 ∞
2. 2个两点分布随机变量 $\begin{cases}\text{分布两点}\\ \text{轨道两点}\end{cases}$

一、马氏链 Markov Chain

1.1 定义

· 状态空间 离散 $S=\{i\}$
· 转移概率 P_{ij}
· 随机矩阵 $P=(P_{ij})_{i,j\in S}$ 满足：$P_{ij}\geq 0$ 且 $\sum_j P_{ij}=1,\ \forall i$
· Markov Chain：$\forall n\geq 0,\ i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}\in S,\ \forall i,j\in S,$

memoryless 无记忆性

可推广至有限步依赖 $P(X_{n+1}=j\mid X_n=i,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})=P_{ij}$

则称 $\{X_n\}$ 为 S 上（时齐）马尔可夫链.

与 n 无关：平移不变性 time-independent

· 马氏性：$P(X_{n+1}=j\mid X_n=i,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$

RHS $=\sum_{(i_0,\cdots,i_{n-1})} P(X_{n+1}=j\mid X_n=i,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})\cdot P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})$

$= p_{ij} \sum_{(i_0,\cdots,i_{n-1})} P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}) = p_{ij}$

例 1.1.6 一维简单 R.W. (SRW): $S=\mathbb{Z}$, $p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=\frac{1}{2}$

↳ 紧邻且对称 $P(\xi_i=1)=P(\xi_i=-1)=\frac{1}{2}$, ξ_n: 步长.

$S_n=S_0+\xi_1+\cdots+\xi_n$, $\{S_n\}$ 为简单 R.W.

d 维随机游动: $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$.

$P(e_i=1)=P(e_i=-1)=\frac{1}{2d}$, $\forall i$

吸收壁、反射壁、环面

例 1.1.7 两状态马氏链: $S=\{0,1\}$, p_{01}, p_{10}

例 1.1.9 (更新过程) $L_1,L_2,\cdots$ i.i.d. $\overset{d}{=}L$, L_r: 第 r 个物品寿命.

$S_0=0$, 更新时刻: $S_n=L_1+L_2+\cdots+L_n$

余寿: $X_n \triangleq S_{r_n}-n$, $r_n=\inf\{r: S_r\geq n\}$

$\Rightarrow X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1, & X_n\geq 1 \\ \overset{d}{=}L, & X_n=0 \end{cases}$

$\Rightarrow p_{i,i-1}=1, \forall i\geq 1$, $p_{0,i}=P(L=i+1), \forall i\geq 0$

$\{X_n\}$ 称为更新过程

- 有限维联合分布: $X_0\sim\mu$, 则: $P(X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)=\mu_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$
- 马氏性: 取定 $n\geq 1$, $i\in S$, 令 $Y_m=X_{n+m}\geq 0$, $m\geq 0$,

则: 在 $\{X_n=i\}$ 的条件下, $\{Y_m\}$ 是 i 出发, P 为转移矩阵的马氏链

且与 $\vec{Z}=(X_0, X_1, \cdots, X_{n-1})$ 独立.

$\vec{Y}=(Y_0, \cdots, Y_m)$, $\vec{J}=(j_0, \cdots, j_m)$, $\vec{v}=(v_0, \cdots v_{n-1})$.

$A=\{X_n=i\}$, $B=\{\vec{Y}=\vec{J}\}$, $C=\{\vec{Z}=\vec{v}\}$

只需: (1) $P_A(B)=1_{\{j_0=i\}} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m}$

(2) $P_A(BC)=P_A(B)\cdot P_A(C)$

$\because P(ABC)=1_{\{j_0=i\}} \mu_{v_0} P_{v_0 v_1} \cdots P_{v_{n-1} i} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m}$

$\therefore P(AB)=\sum_{i_0, \cdots, i_{n-1}} 1_{\{j_0=i\}} \mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i} P_{i j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m}$

$=P(A) 1_{\{j_0=i\}} P_{i j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m}$

$\therefore$ (1) 得证

$\because P_A(BC)=\frac{P(ABC)}{P(A)}=\frac{P(ABC)}{P(AB)}\cdot\frac{P(AB)}{P(A)}$

且 $\frac{P(ABC)}{P(AB)}=\frac{\mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} v_n}}{P(A)}=\frac{P(AC)}{P(A)}$

$\therefore$ (2) 得证.

- 定义: $P_{ij}^{(m)} \triangleq P(X_{n+m}=j \mid X_n=i, X_{n_1}=v_1, \cdots, X_{n_r}=v_r)$

m步 $=P(X_{n+m}=j \mid X_n=i)$

$=\sum_{j_1 \cdots j_{m-1}} P_{ij_1} \cdots P_{j_{m-1} j}=(P^m)_{ij}$

→ 用到 C-K 等式.

- 命题: (C-K 等式) $P^{n+m}=P^n \cdot P^m$

即: $P_{ij}^{(n+m)}=\sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$

LHS $=P(X_{l+n+m}=j \mid X_l=i)$

$=\sum_k P(X_{l+n+m}=j \mid X_{l+n}=k, X_l=i) P(X_{l+n}=k \mid X_l=i)$

$=\sum_k P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj}^{(m)}$

1.2 不变分布 & 可逆分布

一. 不变分布.

记 $P_i(A) = P_\mu(A \mid X_0 = i)$

$\Rightarrow P_\mu(A) = \sum_i \mu_i P_i(A)$

$P_\mu(X_1 = j) = \sum_i \mu_i P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \sum_i \mu_i P_{ij} = (\mu P)_j$

- 定义: $\pi = \{\pi_j : j \in S\}$ 是 S 上的测度/分布.

  若满足不变方程: $\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j$, 即 即: $\pi P = \pi$

  则称 π 为不变分布.

- 性质: $X_0 \sim \pi$, $(X_0, X_1, \cdots, X_n) \overset{d}{=} (X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+n})$ 平移不变性

  满足上式的过程称为平稳过程.

- Perron-Frobenius 定理: S 有限时, 不变分布 π 存在

  (且为 P 的特征值为 1 的左特征向量).

- 流量 (概率的流量)

  引理: $i \to j$

  $\{P_{ik}\} \to \{P_{jk}\}$ 概率的流动.

  i 分配给 j: $P_i P_{ij}$ (其中 $P_i = P(X_0 = i)$)

  $\Rightarrow P_i^{(1)} - P_i^{(0)} = \sum_{j \neq i} (P_j^{(0)} P_{ji} - P_i^{(0)} P_{ij})$

  $P_j^{(0)} P_{ji}$: 接收的; $P_i^{(0)} P_{ij}$: 送出去的

  不变分布 π 时: $\sum_{j \neq i} \pi_j P_{ji} = \sum_{j \neq i} \pi_i P_{ij}$

  考虑 $A \subset S$: $\sum_{i \in A} \sum_j \pi_j P_{ji} = \sum_{i \in A} \sum_j \pi_i P_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_{i\in A, j\in A} \cdots + \sum_{i\in A, j\notin A} \cdots = \sum_{i\in A, j\in A} \cdots + \sum_{i\in A, j\notin A} \cdots$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in A, j\notin A} \pi_i P_{ij} = \sum_{i\in A, j\notin A} \pi_j P_{ji}$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in A, j\notin A} \pi_i P_{ij} = \sum_{i\in A, j\notin A} \pi_j P_{ji}$$

时间可逆

二. 可逆分布 (可逆对称分布) —— 不变分布的特例!

不变分布: $\sum_{i\in I} \pi_i P_{ij} = \sum_{i\in I} \pi_j P_{ji} \Leftrightarrow \sum_{i\in I} (\pi_i P_{ij} - \pi_j P_{ji}) = 0$

可逆分布: 细致平衡条件 (Detailed balance):

$$\pi_i P_{ij} - \pi_j P_{ji} = 0$$

逆过程: π 为不变分布, $\{X_n\}$ 为初分布为 π, 转移矩阵为 P 的马氏链

固定 $N \geq 2$, 令 $Y_n = X_{N-n}$, $n = 0, 1, \cdots, N$

则 $\{Y_n\}$ 称为 $\{X_n\}$ 的逆过程

· 性质: $\{Y_n\}$ 为马氏链, 初分布 π, $\tilde{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$

$$\tilde{P}_{ij} = P(Y_{n+1}=j \mid Y_n = i) = P(X_{N-n-1}=j \mid X_{N-n}=i)$$

$$= \frac{P(X_{N-n-1}=j)\cdot P(X_{N-n}=i \mid X_{N-n-1}=j)}{P(X_{N-n}=i)} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$$

(棘手历史无关!)

Thm: π 可逆分布 $\Leftrightarrow \tilde{P} = P$

· 对称测度的存在性: Kolmogorov 环条件

(1) 若 $P_{ij} > 0$ 则 i, j 连通, 则: 图上无长度为 3 的环时 $\exists$ 对称测度

(2) $\forall$ 路径 $i_0 i_1 \cdots i_n$ 及 $P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} > 0$,

固定 $i_0 = i$, $i_n = i$, 则: $\pi_j = \pi_i \cdot \frac{P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}}{P_{i_n i_{n-1}} \cdots P_{i_1 i_0}}$ (*)

(3) 将 π 归一化, 则:

$\forall$ 环 $v_0 v_1 \cdots v_n v_0$, $p_{v_0 v_1} \cdots p_{v_n v_0} = p_{v_0 v_n} p_{v_n v_{n-1}} \cdots p_{v_1 v_0}$

$\Leftrightarrow$ (*) 中 x_i 是每条路径元素的.

$\Leftrightarrow$ 存在 $p_{ij} = x_j p_{ji}$, $\forall i, j$

$\Leftrightarrow$ 存在某种有穷测: $\log x_i - \log x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{p_{v_k v_{k+1}}}{p_{v_{k+1} v_k}}$

例 1.2.14

配称测度: 存在唯一 (差常数倍意义下)

不变测度: $p = q$ 时, $x_i \equiv x_0$ 存在唯一

$p \neq q$ 时, 无穷多个

可逆分布、不变分布: 不存在

三. 访问频率.

· 更新过程: $\xi_1, \xi_2, \cdots$ i.i.d. $S = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

$P(\xi_1 = 0) < 1$. $S_0 = 0$, $S_r = \xi_1 + \cdots + \xi_r$, $r \geq 1$

$R_n = \max\{r \geq 0 : S_r \leq n\}$ 为发生次数.

则: $P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} = \frac{1}{E\xi_1}\right) = 1$.

注意到: $P(\lim_{n \to \infty} R_n = \infty) = 1$ 且 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} E\xi_1$

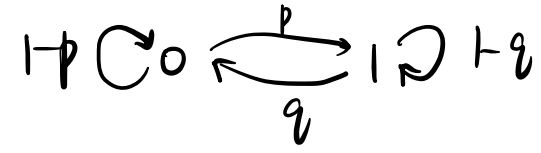
$\because S_{R_n} \leq n < S_{R_n + 1}$

$\therefore \frac{S_{R_n}}{R_n} \leq \frac{n}{R_n} < \frac{S_{R_n+1}}{R_n + 1} \cdot \frac{R_n + 1}{R_n}$ ✓

例 1.2.16 $\frac{1}{n+1} \left|\{m \leq n : X_m = 0\}\right| = \frac{R_{n+1}}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{E\xi_1} = x_0$

状态 0 出现的频率 $\longrightarrow$ 不变分布下 x_0

例 1.2.17 两状态马氏链



不变分布: $\pi_0 = \frac{q}{p+q}$

轨道: $\underbrace{0\cdots0}_{\xi_1}\underbrace{1\cdots1}_{\eta_1}\underbrace{0\cdots0}_{\xi_2}\underbrace{1\cdots1}_{\eta_2}$ $\Rightarrow \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \cdots$ 相互独立.

则: $P(\xi_i = m) = (1-p)^{m-1}p$, $P(\eta_i = m) = (1-q)^{m-1}q$, $m \geq 1$ (几何分布)

考虑 $L_r = \xi_r + \eta_r$. 则 $L_1, L_2, \cdots$ i.i.d

$\Rightarrow$ 状态0出现的次数 $V_0(n) = |\{m \leq n : X_m = 0\}| = \xi_1 + \cdots + \xi_r + \zeta_n$

其中 $r = R_n$, $0 \leq \zeta_n < \xi_{r+1}$.

$\Rightarrow \frac{V_0(n)}{n+1} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{R_n}}{R_n} \cdot \frac{R_n}{n+1} + \frac{\zeta_n}{n+1}$

且 $\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{R_n}}{R_n} \xrightarrow{a.s.} E\xi_1$, $\frac{R_n}{n+1} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{EL_1}$, $\frac{\zeta_n}{n+1} \xrightarrow{a.s.} 0$

故 $\frac{V_0(n)}{n+1} \xrightarrow{a.s.} \frac{E\xi_1}{EL_1} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \frac{q}{p+q} = \pi_0$

另解: $n_1 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$

$n_2 = \inf\{n \geq n_1 + 1 : X_n = 0\}$

$L_r = n_r - n_{r-1}$, 则 $P(L_r = m) = \begin{cases} 1-p, & m = 1 \\ p(1-q)^{m-2}q, & m \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow L_1, L_2, \cdots$ i.i.d 且 $EL_r = \frac{p+q}{q} = \frac{1}{\pi_0}$

而 $V_0(n) = R_n \Rightarrow \frac{V_0(n)}{n} = \frac{R_n}{n} \to \frac{1}{EL_1} = \pi_0$

四. 访问概率和收敛性

例 1.2.18 两状态马氏链: $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}A$

$\Rightarrow \lambda = 1-p-q \in (-1, 1)$, $A = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \frac{1}{p+q} & -\frac{1}{p+q} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & -q \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^n = A^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}\pi_0&\pi_1\\\pi_0&\pi_1\end{pmatrix}$ → 不收敛!

1.3 状态和分类.

$P_i(\bigcup_{m\geq 1}\{X_m=j\})$

· 定义: i 可达 j, 记作 $i\to j$, 若 $P_i(\exists n\geq 0, \text{s.t. } X_n=j)>0$

$\Leftrightarrow$ 上i 或 $j\neq i$ 且 $\exists n\geq 1$, $i_0=i, i_1, \cdots, i_n=j$,

s.t. $P_{ii_1}P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n-1}i_n}>0$

$\Leftrightarrow \exists n, P_{ij}^{(n)}>0$

· 定义: $i\to j$ 且 $j\to i$, 则 i,j 互通. 记为 $i\leftrightarrow j$

$\forall i,j$ 互通, 则马氏链不可约 (irreducible), 否则可约.

互通类 $[i]=\{j: j\leftrightarrow i\}$

· 定义: 若 $P_{ij}=0$, $\forall i\in A, j\notin A$, $A\subset S$, 则称 A 为闭集.

闭和互通类称为闭类.

· 命题: (1) A 闭 $\Rightarrow P_i(X_n\in A, \forall n\geq 0)=1$, $\forall i\in A$.

(2) A 互通类 且非闭 $\Rightarrow P_i(\exists n, X_n\notin A)>0$, $\forall i\in A$

1.4 首达时与强马氏性

一、首达时、首入时.

轨道 $\omega=(X_0(\omega), X_1(\omega), \cdots)=\vec{X}(\omega)$

首达(中)时: $\tau_i(\omega)=\min\{n\geq 0: X_n(\omega)=i\}$, 规定 $\min\phi=\infty$

首入时：$\tau_i(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\}$

二. 一维简单随机游动的首达时.

$\xi_1, \xi_2, \cdots$ i.i.d. $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$

$S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

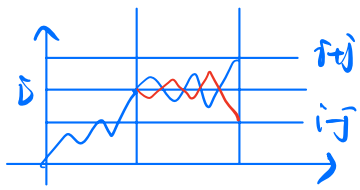
· 命题 1.4.3：（反射原理）

$P_0(\tau_i < n, S_n = v + j) = P_0(\tau_0 < n, S_n = v - j)$, $\forall j \geq 1$

找轨道间的一一对应.

$v = 0$ 或 $v \geq n$ ✓

$1 \leq v < n-1$ 构造一一映射：



注：$P_0(\tau_i < n, S_n = v + j) = P_0(S_n = v + j)$ 可算出！

· 命题 1.4.4：$P_0(\tau_i = n) = \frac{i}{n} P_0(S_n = i)$

不妨 $n+v$ 偶.

拆开

$\{S_n = v\} = \{\tau_i = n\} + \{\tau_i < n, S_n = v\}$

即 $\{\tau_i < n, S_n = v\} = \{\tau_i < n, S_{n-1} = v+1, S_n = v\} + \{\tau_i < n, S_{n-1} = v-1, S_n = v\}$

分前一步那一步

$= \{\tau_i < n-1, S_{n-1} = v+1, S_n = v\} + \{\tau_i < n-1, S_{n-1} = v-1, S_n = v\}$

$\Rightarrow P(\tau_i < n, S_n = v) = 2P(\tau_i < n-1, S_{n-1} = v+1, S_n = v)$

$= 2P(S_{n-1} = v+1, S_n = v) = P(S_{n-1} = v+1)$

$\Rightarrow P(\tau_i = n) = P(S_n = v) - P(S_{n-1} = v+1) = \frac{i}{n} P(S_n = v)$

· 推论 1.4.5：$P_0(\tau_1 > 2n-1) = P_0(S_{2n}=0)$

$\{\tau_1 \le 2n-1\} = \{\tau_1 < 2n\}$

$P(\tau_1 < 2n,\ S_{2n} = 1 \pm j) = 2P(S_{2n} = 1+j)$ 注 $P(S_{2n}=1)=0$

对 $j \ge 1$ 求和：$P(\tau_1 < 2n) = 2P(S_{2n} \ge 2) = P(S_{2n} \ne 0)$ ✓

· 推论 1.4.6：$P_0(\tau_1 < \infty) = P_0(\delta_0 < \infty) = 1$，常返

$E_0\tau_1 = \infty$，$E_0\delta_0 = +\infty$ 零常返

$\delta_0 \overset{d}{=} 1 + \tau_1$

$P_0(\tau_1 > 2n-1) = C_{2n}^{n} 2^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

$\Rightarrow E\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\tau_1 \ge n) + 1 = +\infty$

· 命题 1.4.8：(反正弦律)

记 $\Sigma_n = \max\{m \le n : S_m = 0, S_{m+1} \ne 0, \cdots, S_n \ne 0\}$

则：$\lim_{n\to\infty} P_0(\Sigma_n \le \delta n) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\delta}$.

$m \triangleq [\delta n]$

$\Rightarrow P_0(\Sigma_n \le \delta n) = P_0(S_r \ne 0,\ \forall m < r \le n)$ 与开始：只需从第 m 步开始考虑

$\xrightarrow{n\to+\infty} = \sum_{j} P_0(S_m = j) P_j(\tau_0 > n-m)$

而 $P_j(\tau_0 > n-m) = P_0(\tau_j > n-m)$

$\forall j \ge 1$，$\{\tau_1 \le n-m\} = \{S_{n-m} = j\} + \{\tau_0 < n-m,\ S_{n-m} > j\}$

$+ \{\tau_1 < n-m,\ S_{n-m} < j\}$

$\Rightarrow P_0(\tau_1 \le n-m) = P_0(S_{n-m} = j) + 2P(S_{n-m} > j)$

$\Rightarrow P_0(\Sigma_n \le \delta n) = 1 - \sum_{j} P_0(S_m = j) \cdot P_0(\tau_1 \le n-m)$

$= 1 - \sum_v P_0(S_n = v) \cdot [P_0(S_{n+m} = v) + P_0(|S_{n+m}| > |v|)]$

$= P_0(\frac{S_m}{\sqrt{m}} = \frac{v}{\sqrt{m}}) \quad \approx \phi(\frac{v}{\sqrt{n+m}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+m}}$

$\approx \phi(\frac{v}{\sqrt{m}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$

故 $\sum_v P_0(S_m = v) \cdot P_0(S_{n+m} = v) \approx \sum_v \phi(\frac{v}{\sqrt{m}}) \cdot \phi(\frac{v}{\sqrt{n+m}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{m(n+m)}}$

$\to \frac{1}{\sqrt{m}} \int \phi(x\sqrt{\frac{n+m}{m}}) \cdot \phi(x)\, dx \to 0$

$\sum_v P_0(S_m = v) P_0(|S_{n+m}| > |v|)$

$= \sum_v P_0(S_m = v) P_0(|T_{n+m}| > |v|)$，其中 $\{T_n\} \overset{d}{=} \{S_n\}$ 独立.

$= P(|S_m| < |T_{n+m}|) = P(|\frac{S_m}{\sqrt{m}}| < |\frac{T_{n+m}}{\sqrt{n+m}}| \cdot \sqrt{\frac{n+m}{m}}) \to P(|\frac{W}{Z}| > \sqrt{\frac{s}{1-s}})$

其中 $W, Z \sim N(0,1)$.

故 $P_0(\Sigma_n \in \delta n) \to \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\delta}$

* ODE中的马氏性：

自治微分方程：$\frac{dx}{dt} = f(x)$ (与 t 无关) 无产生随机性的Markov性

$\Rightarrow$ 向量场在某点处只与 x 有关，与时间 t 无关

三、强马氏性

记 $\tau = \tau_v$，设 $P(\tau < \infty) > 0$.

在 $\{\tau < \infty\}$ 的条件下，令 $(Y_0, Y_1, \cdots) = (X_\tau, X_{\tau+1}, \cdots)$ 产生随机对齐.

· 命题 1.4.10：$\{\tau_v < \infty\}$ 或 $\{\tau_i = n\}$ 的条件下，

$\{Y_m\}$ 是从 v 出发的马氏链 且 $\{Y_m\}$ 与 $\vec{z}$ 相互独立.

$\vec{z} = (X_0, X_1, \cdots, X_\tau)$，随机长度，或 $I = \bigcup_n I_n$，

其中 $I_n = \{\vec{v} \in S^{n+1} : v_0, v_1, \cdots, v_{n-1} \neq v, v_n = v\}$

分析：记 $\vec{v}=(v_0,\cdots,v_n)$，$\vec{X}^{(m)}=(X_0,\cdots,X_m)$

为：$\forall \vec{v}\in I_n$，$\{\vec{Z}=\vec{v}\}=\{\vec{X}^{(m)}=\vec{v}\}$

$\Rightarrow P(\vec{Z}=\vec{v})=\mu_{v_0}P_{v_0v_1}\cdots P_{v_{m-1}v_m}$

$P_{\tau<\infty}(\vec{Z}=\vec{v})=P(\vec{Z}=\vec{v}\mid\tau<\infty)$

证明：只对 $D=\{\tau=n\}$ 的情况证明：

此时 $\vec{Z}=\vec{X}^{(m)}\in I_n$

记 $\vec{j}=(j_0,\cdots,j_m)$

$B=\{(\gamma_0,\cdots,\gamma_m)=\vec{j}\}$，$\hat{B}=\{(X_n,\cdots,X_{n+m})=\vec{j}\}$

$C=\{\vec{Z}=\vec{v}\}$，$\hat{C}=\{\vec{X}^{(n)}=\vec{v}\}$

只需验证：$P_{\tau=n}(BC)=1_{\{j_0=v_0\}}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{\tau=n}(C)$

易见 $C=\hat{C}\subseteq D$

$BD=\hat{B}D\quad(\hat{B}\neq B)$

故 $BC=BDC=\hat{B}DC=\hat{B}\hat{C}$

$\Rightarrow P_{\tau=n}(\hat{B}\hat{C})=1_{\{j_0=v_0\}}\mu_{v_0}P_{v_0v_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}$

$P_{\tau=n}(\hat{C})=\mu_{v_0}P_{v_0v_1}\cdots P_{v_{m-1}v_m}$

$\Rightarrow P_{\tau=n}(BC)=P_{\tau=n}(\hat{B}\hat{C})=1_{\{j_0=v_0\}}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{\tau=n}(\hat{C})$

$=1_{\{j_0=v_0\}}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{\tau=n}(C)$

例：推论 1.4.6 的叙述：

由强马氏：$\tau_1,\tau_2-\tau_1,\tau_3-\tau_2,\cdots$ i.i.d.

$\Rightarrow E_0\tau_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+E_0\tau_2)=1+E_0\tau_1$

$\Rightarrow E_0\tau_1=\infty$

1.5 常返性

- 可达 $j \to i$: $P_j(T_i < \infty) > 0$
- 问: 访问 i 多少次?

一. 回访时间

给定 i, $T_0 = 0$, $\forall r \geq 1$. 若 $T_{r-1} < \infty$, 则 $T_r \triangleq \min\{n \geq T_{r-1}+1 : X_n = i\}$

$$\sigma_r \triangleq T_r - T_{r-1}$$

若 $T_{r-1} = \infty$, 则 $T_r = \infty$, $\sigma_r = \infty$

- 命题 1.5.1 : $\forall r \geq 1$, $m_1, m_2, \cdots, m_r \geq 1$,

则: $P_i(\sigma_1 = m_1, \cdots, \sigma_r = m_r) = \prod_{s=1}^{r} P_i(\sigma_1 = m_s)$ 由强马氏性显然.

$\vec{v} = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$

$J_n = \{\vec{v} \in S^{n+1} : v_0 = v_n = i,\ v_r \neq i,\ r = 1, 2, \cdots, n-1\}$

$n_s \triangleq \sum_{t=1}^{s} m_t$, $\vec{Z}_s = (X_{n_{s-1}}, \cdots, X_{n_s})$ 长度随机

$$\Rightarrow P_i(\sigma_1 = m_1, \cdots, \sigma_r = m_r) = \sum_{\vec{v}_1 \in J_{m_1}, \cdots, \vec{v}_r \in J_{m_r}} P_i(\vec{Z}_1 = \vec{v}_1, \cdots, \vec{Z}_r = \vec{v}_r)$$

$$\text{马氏性} = \sum_{\vec{v}_1 \in J_{m_1}} \sum_{\vec{v}_2 \in J_{m_2}} \cdots \sum_{\vec{v}_r \in J_{m_r}} P_i(\vec{X}^{(m_1)} = \vec{v}_1) \cdot P_i(\vec{X}^{(m_2)} = \vec{v}_2) \cdots P_i(\vec{X}^{(m_r)} = \vec{v}_r)$$

长度固定

$$= \prod_{s=1}^{r} \sum_{\vec{v}_s \in J_{m_s}} P_i(\vec{X}^{(m_s)} = \vec{v}_s) = \prod_{s=1}^{r} P_i(\sigma_1 = m_s)$$

- 推论 1.5.2 : 记 $\rho_i \triangleq P_i(\sigma_1 < \infty)$, 则 $P_i(T_r < \infty) = \rho_i^r$

$r = 1$ ✓

$$P_i(T_{r+1} < \infty) = P_i(\sigma_1 < \infty, \sigma_2 < \infty, \cdots \sigma_{r+1} < \infty)$$

$$= P_i(\sigma_1 < \infty) \cdot P_i(\sigma_2 < \infty, \cdots, \sigma_{r+1} < \infty \mid \sigma_1 < \infty)$$

$$\text{强马氏性} = P_i(\sigma_1 < \infty) \cdot P_i(T_r < \infty) = \rho_i^{r+1}$$

注: $\rho_i = 1$ 时, $\{\sigma_r\}$ i.i.d.

$\rho_j < 1$ 时，$[G_j]$ 不独立（$G_1 = \infty$ 时，$G_2 = G_3 = \cdots = \infty$）

注意随机过程中随机变量可取 ∞

二. 回访总次数

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[X_n = i]} = |\{n : X_n = i\}|$$

$$P(V_i \geq r+1) = P(T_r < \infty) = \rho_i^r, \quad \forall r \geq 0$$ 几何分布！

- 定义：常返：$\rho_i = 1 \Leftrightarrow P_i(V_i = \infty) = 1 \Leftrightarrow E_i V_i = +\infty$
  （显然）（$\Rightarrow$：显然；$\Leftarrow$：几何分布：$E_i V_i = \frac{1}{1-\rho_i}$）

  非常返：$\rho_i < 1 \Leftrightarrow P_i(V_i < \infty) = 1 \Leftrightarrow E_i V_i < \infty$

  0-1律：$P_i(V_i = \infty)$ 要么为0，要么为1（没有中间状态！）

- 命题 1.5.5：i 常返，$X_0 = i$，$\vec{Z}^{(r)} = (X_{T_{r-1}}, \cdots, X_{T_r})$

  则：$\vec{Z}^{(1)}, \vec{Z}^{(2)}, \cdots$ i.i.d.（强马氏性）$P(\vec{Z}^{(1)} = \vec{i}) = p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$，$\vec{i} \in J_n$

  游式：excursion

三. 常返与互通类

- 命题 1.5.6：i 常返且 $i \to j$ 则：

  (1) j 常返且 $j \to i$.

  (2) $P_i(V_j = \infty) = P_j(V_i = \infty) = 1$

  (3) $P_i(T_j < \infty) = P_j(T_i < \infty) = 1$

证：依次证明：

(i) $P_i(V_j = \infty) = 1$，进而 $P_i(T_j < \infty) = 1$

(ii) $P_j(V_i = \infty) = 1$，进而 $P_j(T_i < \infty) = 1 \Rightarrow j \to i$

(iii) j 常返.

(i) $X_0=j$, $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots$ i.i.d.

$\Rightarrow A_r=[\vec{z}_r$ 出现 $j]$, $A_1, A_2, \cdots$ i.i.d.

注意到: $P_i(\tau_j<\infty)>0$ 且 $\{\tau_j<\infty\}\subset \bigcup A_i$ (用到 $i\to j$)

$\Rightarrow P(A_i)\triangleq p>0$

$\Rightarrow \frac{1_{A_1}+\cdots+1_{A_n}}{n} \xrightarrow{a.s.} P(A_i)=p \Rightarrow P_i(V_j=\infty)=1$

(ii) $X_0=j$, $Y_n\triangleq X_{\tau_j+n}$ $\quad V_i^{(r)}\le V_i\le V_j^{(r)}+\tau_j$

由强马氏性: $1=P_i(V_i=\infty)=P_i(V_i^{(r)}=\infty)=P_j(V_i=\infty)$ (用到 i 常返)

(iii) $X_0=j$, $Y_n\triangleq X_{\tau_i+n}$

由强马氏性: $P_j(V_j=\infty)=P_j(V_j^{(r)}=\infty)=P_i(V_j=\infty)=1$

1.6 击中概率.

能到达 j 的概率? $\to$ 计算 $P(\tau_i<\infty)$

一. 首步分析法与击中概率.

例 1.6.1 赌徒破产模型

简单随机游动: $\tau=\tau_0\wedge\tau_N$, 由 $P_k(\tau_0<\infty, \tau_N<\infty)=1$ (有限次互通为常返(推论1.4.6))

记 $x_k\triangleq P_k(\tau_N<\tau_0)$, 则 $x_k=\frac{1}{2}x_{k-1}+\frac{1}{2}x_{k+1}$, $0<k<N$.

$x_0=0$, $x_N=1 \Rightarrow x_k=\frac{k}{N}$. (等局部困难但算全局简单)

一般情况: 固定 $0\in S$, $x_i\triangleq P_i(\tau_0<\infty)$

$\Rightarrow x_i=\sum_{j\in S}p_{ij}x_j$, $\forall i\neq 0$, $x_0=1$.

固定 $D \subseteq S$，$x_i \triangleq P_i(\tau_D < \infty)$

$\Rightarrow$ $x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j$，$\forall i \notin D$；$x_i = 1$，$\forall i \in D$.

注：1. 方程组的解一定存在，但不一定唯一.

命题 1.6.2：$\{P_i(\tau_D < \infty)\}$ 为方程组的最小非负解. "点点最小"

2. 记 $G_D \triangleq y_i$，$y_i = \sum_j p_{ij}(1 + y_j)$，且 $\{y_i\}$ 为满足方程组的最小非负解.

3. 怎么求 G_D 的分布？

记 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$，其中 $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}$，$\forall i$，$\forall j \neq k$；$\tilde{p}_{ik} = 0$，$\forall i$

则 $P(\tau_k = m) = (\mu \tilde{P}^m)_k$

考虑概率的"流动"，状态 k 就作"黑洞"，只有流入没有流出.

二、击中概率与判别常返性

· 命题：固定 $0 \in S$，S 不可约，则：0 常返 $\Leftrightarrow$ $x_i \equiv 1$，$\forall i$.

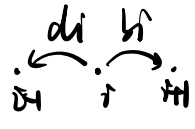
$\Rightarrow$：命题 1.5.6

$\Leftarrow$：$\rho_0 \triangleq P_0(G_0 < \infty) = \sum_{i \in S} p_{0i} P_i(\tau_0 < \infty) = 1$ $\Rightarrow$ 0 常返.

· 命题 1.6.4：S 常返 $\Leftrightarrow$ 方程组在 $[0,1]$ 上有唯一解 $x_i \equiv 1$

S 非常返 $\Leftrightarrow$ 方程组在 $[0,1]$ 上有不恒为 1 的解.

例：生灭链 $b_{i+1} = b_i > 0$，$d_{i+1} = d_i > 0$，$i \geq 1$，$b_i + d_i = 1$.



$x_i = P_i(\tau_0 < \infty) \Rightarrow \begin{cases} x_i = b_i x_{i+1} + d_i x_{i-1}, & i \geq 1 \\ x_0 = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 - x_{i+1} = (x_{i-1} - x_i)\frac{d_i}{b_i} = \cdots = (1 - x_1)\frac{d_1 \cdots d_i}{b_1 \cdots b_i}$

记 $R_{i+1} \triangleq 1+\sum_{k=1}^{i} \frac{a_1 \cdots a_k}{b_1 \cdots b_k} \to R$.

$\Rightarrow 1-x_{i+1} = R_i (1-x_1)$

$R=\infty \Rightarrow x_i \equiv 1$ 常返.

$R<\infty \Rightarrow$ 取 $x_1 = 1-\frac{1}{R}$ 为 $(0,1)$ 上取的.

进一步, $\mathbb{Z}$ 上随机游动, $p_{i,i+1}=p$, $p_{i,i-1}=q$, 且 $p \geq q$

常返 $\Leftrightarrow$ 往两边走均常返

只有 $\mathbb{Z}_-$: $R = 1+\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{p}{q})^k = \infty$ 常返

只有 $\mathbb{Z}_+$: $R = 1+\sum (\frac{q}{p})^k$ 在 $p=q$ 时常返, 在 $p>q$ 时非常返

综上, 仅在 $p=q$ 时常返.

$p \geq q$ 时, $P_0(\tau_1<\infty)=1$, 求 $P_0(\tau_{-1}<\infty) \triangleq x$?

$= p + q P_1(\tau_0<\infty) = p + q P_1(\tau_0<\infty \mid \tau_0<\infty)$

$= p + q \cdot P_0(\tau_1<\infty)$

$x = p P_1(\tau_{-1}<\infty) + q = px^2 + q$ (平移不变性)

$\Rightarrow x=1$ 或 $\frac{q}{p}$, 取最小非负解 $\Rightarrow x = \frac{q}{p}$

例 1.6.6: 在对树 T^d 上的 λ-biased R.W.

v_0 父结点, 子结点 $v_1, \cdots, v_d$.

$p_{v_0 v_0} = \frac{\lambda}{\lambda+d}$, $p_{v_0 v_j} = \frac{1}{\lambda+d}$, $j=1,2,\cdots,d$

对称性 用 a_n 表示 $P_0(\tau_0<\infty) = P_j(\tau_0<\infty) = a_{|i-j|}$ (转化为一维马氏链.)

$a_n = \frac{\lambda}{\lambda+d} a_{n-1} + \frac{d}{\lambda+d} a_{n+1}$, $n \geq 1$; $a_0 = 1$

$\Rightarrow d(a_n - a_{n+1}) = \lambda(a_{n-1} - a_n) \Rightarrow a_n - a_{n+1} = (\frac{\lambda}{d})^n (a_0 - a_1)$

$\Rightarrow a_0 - a_n = (a_0 - a_1)(1 + \frac{\lambda}{d} + \cdots + (\frac{\lambda}{d})^{n-1})$

$\lambda \geq d \Rightarrow a_n \equiv 1$ 常返

$\lambda < d \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{d}$, $a_n = (\frac{\lambda}{d})^n$ 非常返.

1.7 格林函数与判别常返性

$\forall i,j$, $G_{ij} = E_i V_j = E_i \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$

i 常返 $\Leftrightarrow G_{ii} = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

例：d 维 S.R.W.

$d=1$. $P_{00}^{(2n+1)} = 0$, $P_{00}^{(2n)} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ 常返.

$d=2$, $\cdots$ $P_{00}^{(2n)} = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{(2n)!}{(n_1!\,n_2!)^2} \frac{1}{4^{2n}}$

$= C_{2n}^{n} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m C_n^{n-m} \right) \frac{1}{2^{2n}}$

$= \left(C_{2n}^{n} \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$ 常返.

$d \geq 3$, 非常返

$P_{00}^{(2n)} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{(2n)!}{(n_1!\,n_2!\,n_3!)^2} \frac{1}{6^{2n}}$

先确定方向：$P(K=2n_1, M=2n_2, N=2n_3) = \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!(2n_3)!} \cdot \frac{1}{3^{2n}}$

$\Rightarrow P_{00}^{(2n)} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!(2n_3)!} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n_1}} C_{2n}^{n_1} \cdot \frac{1}{2^{2n_2}} C_{2n_2}^{n_2} \cdot \frac{1}{2^{2n_3}} C_{2n_3}^{n_3}$

估计：$P_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ → 分两部分估算

$\vec{N} = \{ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3 : n_1+n_2+n_3 = n \}$

$I = \{ \vec{n} \in \vec{N} : n_i \geq \frac{n}{6}, \forall i \}$

$\vec{n} \in I$ 时, $\exists C$, $\frac{1}{2^{2n_i}} C_{2n_i}^{n_i} \leq C \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $i = 1,2,3$

$\Rightarrow \sum_{\vec{n} \in I} \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!(2n_3)!} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n_1}} C_{2n_1}^{n_1} \cdot \frac{1}{2^{2n_2}} C_{2n_2}^{n_2} \cdot \frac{1}{2^{2n_3}} C_{2n_3}^{n_3} \leq \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{n} \in I} \cdots \leq \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum_{\vec{n} \in \vec{N} \setminus I} \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!(2n_3)!} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n_1}} C_{2n_1}^{n_1} \cdot \frac{1}{2^{2n_2}} C_{2n_2}^{n_2} \cdot \frac{1}{2^{2n_3}} C_{2n_3}^{n_3}$

$\leq \sum_{\vec{n} \in \vec{N} \setminus I} \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!(2n_3)!} \cdot \frac{1}{3^{2n}} = P(K < \frac{n}{6} \text{ 或 } M < \frac{n}{6} \text{ 或 } N < \frac{n}{6}) \leq 3\, P(K < \frac{n}{6})$

$\leq 3\, P(|K - \frac{2}{3}n| > \frac{n}{6})$ $\quad K \sim B(2n, \frac{1}{3})$, $EK = \frac{2}{3}n$

$\leq 3 \cdot \frac{E(K - \frac{2}{3}n)^4}{(\frac{n}{6})^4} \leq \frac{C}{n^2}$

二. 其他应用

- 推论 1.7.3：i 常返，$i \to j$，则 j 常返

$$j \to i \Rightarrow i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\, n, m \geq 1,\ p_{ij}^{(m)} > 0,\ p_{ji}^{(n)} > 0$$

$r \geq 0$ 时，$p_{jj}^{n+m+r} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(m)}$

对 r 求和，$G_{jj} \geq p_{ji}^{(n)} G_{ii} p_{ij}^{(m)} = \infty \Rightarrow G_{jj} = \infty$

- 命题 1.7.4：$G_{ij} = P_i(T_j < \infty)\, G_{jj}$

$i = j$ ✓

$i \neq j$，$V_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}$，若 $T_j = \infty \Rightarrow V_j = 0$

若 $T_j < \infty \Rightarrow Y_n = X_{T_j + n}$，$V_j = V_j^{(Y)}$

$\forall m \geq 1$，$P_i(V_j = m) = P_i(V_j^{(Y)} = m,\ T_j < \infty)$

$= P_i(T_j < \infty) \cdot P_i(V_j^{(Y)} = m \mid T_j < \infty)$ 强马性

$= P_i(T_j < \infty) \cdot P_j(V_j = m)$

$G_{ij} = E_i V_j = \sum_{m=1}^{\infty} m P_i(V_j = m) = P_i(T_j < \infty) \sum_{m=1}^{\infty} m P_j(V_j = m) = P_i(T_j < \infty) G_{jj}$

或：$G_{ij} = E_i V_j = P_i(T_j = \infty) \cdot 0 + P_i(T_j < \infty) \cdot E_i(V_j^{(Y)} \mid T_j < \infty)$

$= P_i(T_j < \infty) \cdot E_j V_j = P_i(T_j < \infty) G_{jj}$

- 推论 1.7.5：j 非常返，则 $\forall i$，$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

$G_{ij} \leq G_{jj} < \infty \Rightarrow p_{ij}^{(n)} \to 0$

- 推论 1.7.6：$\{X_n\}$ 为不可约，j 非常返，则 $\forall i$，$G_{ij} \leq G_{jj} \Rightarrow x_i G_{ij} \leq x_i G_{jj}$

$\Rightarrow \sum_j x_j G_{ij} \le G_{jj} < \infty$

而 $\sum_j x_j G_{ij} = \sum_j x_j \sum_{n=0} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0} \sum_j x_j p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0} x_j \Rightarrow x_j = 0$

三、有限区域的格林函数 反映两点情况

$D \subset S$，$\tau = \tau_{D^c}$ 为第一次走出 D 的时间.

$G_{ij}^{(D)} = E_i \sum_{n=0}^{\tau-1} 1_{\{X_n = j\}}$，$i, j \in D$. 到达两点之前到 j 的次数.

固定 $0 \in D$，$x_i = G_{i0}^{(D)}$

满足 $x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j$，$\forall i \in D \setminus \{0\}$，

$x_0 = 1 + \sum_{j \in S} p_{0j} x_j$，

$x_i = 0$，$i \in D^c$.

例 1.7.7 $\{S_n\}$ 一维 S.R.W.，$N \ge 3$，$D = \{1, 2, \cdots, N-1\}$.

求：$G_{ij}^{(D)} = \begin{cases} \frac{2}{N} i(N-j), & 0 < i \le j < N \\ \frac{2}{N} j(N-i), & 0 < j < i < N \end{cases}$

固定 j，$x_i = G_{ij}^{(D)}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{2} x_{i-1} + \frac{1}{2} x_{i+1}, & 0 < i < N, i \ne j \\ x_j = 1 + \frac{1}{2} x_{j-1} + \frac{1}{2} x_{j+1} \\ x_0 = x_N = 0 \end{cases}$

- 命题：$E_i \tau = \sum_{j \in D} G_{ij}^{(D)}$

$RHS = \sum_{j \in D} E_i \sum_{n=0}^{\tau-1} 1_{\{X_n = j\}} = E_i \sum_{n=0}^{\tau-1} \left(\sum_{j \in D} 1_{\{X_n = j\}} \right) = E_i \tau$

而 $y_i = E_i \tau$，满足 $y_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} y_j$，$\forall i \in D$；$y_i = 0$，$\forall i \notin D$.

例 1.7.8 $E_0(\tau_0 \wedge \tau_N) = x(N-x)$

法 1：用例 1.7.7 $\tau_0 \wedge \tau_N = \tau_D^c$，$D = \{1, 2, \cdots, N-1\}$

法 2：$y_x = E_x(\tau_0 \wedge \tau_N)$

$$\begin{cases} y_x = 1 + \frac{1}{2} y_{x-1} + \frac{1}{2} y_{x+1}, & 1 \le x \le N-1 \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

四. Wald 等式

S.R.W. $S_0 = 0$，$\tau = \tau_j \wedge \tau_{-r}$

$\Rightarrow P_0(S_\tau = j) = 1 - P_0(S_\tau = -r) = \frac{r}{r+j}$ （赌徒模型）

$\Rightarrow E_0 S_\tau = 0$，$E_0 S_\tau^2 = rj$，$E_0 \tau = rj$（由上例）$\Rightarrow E_0 S_\tau^2 = E_0 \tau$

· 定理：对一般的停时 τ，$E\tau < \infty$，$E|\xi_i| < \infty$，$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$，$n \ge 1$.

则 $ES_\tau = E\xi_i \cdot E\tau$ （Wald 等式）

$ES_\tau = E\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 1_{\{\tau \ge n\}} = \sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n 1_{\{\tau \ge n\}}$

而 ξ_n 与 $1_{\{\tau \ge n\}}$ 独立 $\Rightarrow ES_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n P(\tau \ge n) = E\xi_i \cdot E\tau$

· 定理：$E\xi_i^2 < \infty$，$E\xi_i = 0$，$E\tau < \infty \Rightarrow ES_\tau^2 = E\tau \cdot E\xi_i^2$ （Wald 第二等式）.

截断 $S_{\tau \wedge n} = \sum_{i=1}^{\tau \wedge n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i 1_{\{\tau \ge i\}}$

$$\Rightarrow ES_{\tau \wedge n}^2 = E\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 1_{\{\tau \ge i\}} + 2E\sum_{1 \le i < j \le n} \xi_i \xi_j 1_{\{\tau \ge j\}}$$

$$= E\xi_i^2 \cdot E(\tau \wedge n) + 2\sum_{i<j} E\,\xi_i 1_{\{\tau \ge j\}} \cdot E\xi_j$$

（$\xi_i 1_{\{\tau \ge j\}}$ 与 ξ_j 独立）

$$= E\xi_i^2 \cdot E(\tau \wedge n)$$

而 $ES_{\tau \wedge n}^2 \xrightarrow{n \to \infty} ES_\tau^2$（有界收敛），$E(\tau \wedge n) \xrightarrow{n \to \infty} E\tau$（单调收敛）✓

1.8 遍历定理与正常返

总假设 S 不可约.

一、频率与极限.

· 定理 1.8.1: $\forall \mu, \forall i \in S$, $P_\mu\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = 1$,

其中 $V_i(n) = \sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{X_m = i\}}$

非常返: $E_i G_i = \infty$, $V_i(n) < \infty$ a.s. $\Rightarrow P_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = 1$

常返: $X_0 = i$, 更新定理 $\Rightarrow P_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = 1$

$X_0 \neq i$, $\tau_i < \infty$, a.s., $Y_n = X_{\tau_i + n}$

$\Rightarrow P_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = P_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i^{(\tau_i)}(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = 1$

而 $P_\mu\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = \sum_{i\in S} \mu_i P_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i G_i}\right) = 1$ ✓

· 命题 1.8.2: 若为 P 的不变分布. 则 $\forall i \in S$, $\pi_i > 0$ 且 $\pi_i = \frac{1}{E_i G_i}$

(推论: $\sum \frac{1}{E_i G_i} = 1$)

$\exists\, 0 \in S$, $\pi_0 > 0$

$0 \to i \Rightarrow \forall i, \exists n, p_{0i}^{(n)} > 0$

$\Rightarrow \pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji}^{(n)} \geq \pi_0 p_{0i}^{(n)} > 0$

有界收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E_\pi\left(\frac{V_i(n)}{n}\right) = E_\pi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n}\right) = \frac{1}{E_i G_i}$

而 $E_\pi\left(\frac{V_i(n)}{n}\right) = \frac{1}{n} E_\pi \sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{X_m = i\}} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} E_\pi 1_{\{X_m = i\}} = \pi_i$

故 $\pi_i = \frac{1}{E_i G_i}$

注: 不可约 + 有不变分布 $\Rightarrow$ 不变分布唯一

二、正常返与不变分布.

· 定义：正常返：$P_i(G_i<\infty)=1$ 且 $E_iG_i<\infty$

零常返：$P_i(G_i<\infty)=1$ 但 $E_iG_i=\infty$

· 定义：取定 $0\in S$，$\mu_i=E_0\sum_{n=0}^{G_0-1}1\{X_n=i\}$

表示从0到0前访问 i 的次数

· 命题 1.8.4：0常返，则 $\sum_{i\in S}\mu_iP_{ij}=\mu_j$ 构造一个不变测度

$\mu_0=1$

$j\neq 0$ 时，$\mu_j=E_0\sum_{n=0}^{G_0-1}1\{X_n=j\}=E_0\sum_{n=0}^{\infty}1\{n<G_0,X_n=j\}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}E_0\,1\{n<G_0,X_n=j\}=\sum_{n=0}^{\infty}P_0(n<G_0,X_n=j)$

$\Rightarrow\sum_i\mu_iP_{ij}=\sum_i\sum_{n=0}^{\infty}P_0(n<G_0,X_n=i)\cdot P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$

$=\sum_i\sum_{n=0}^{\infty}P_0(n<G_0,X_n=i)\cdot P(X_{n+1}=j\mid X_n=i,n<G_0)$

$=\sum_i\sum_{n=0}^{\infty}P_0(n<G_0,X_n=i,X_{n+1}=j)$ 用马氏性！

$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_iP_0(n<G_0,X_n=i,X_{n+1}=j)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}P_0(n<G_0,X_{n+1}=j)$

$=E_0\sum_{n=1}^{G_0}1\{X_n=j\}$

若 $j=0$，则 $\sum_{n=1}^{G_0}1\{X_n=i\}=1=\sum_{n=0}^{G_0-1}1\{X_n=j\}$

若 $j\neq 0$，则 $1\{X_0=j\}=1\{X_{G_0}=j\}=0$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{G_0}1\{X_n=i\}=\sum_{n=0}^{G_0-1}1\{X_n=j\}$

故 $\sum_i\mu_iP_{ij}=\mu_j$

· 定理 1.8.5：P不可约，则下列等价：

(1) 所有状态正常返

(2) 子正常返态

(3) 子不变分布

(2)⇒(3): 由命题1.8.4: 子不变测度 μ.

即 $\sum \mu_i = \Gamma_0 G_0 < \infty \Rightarrow$ 子不变分布

(3)⇒(2): 由命题1.8.2: $\pi_i = \frac{1}{\Gamma_i G_i} > 0$

· 互通类: 正常返类. 零常返类. 非常返类.

· 推论1.8.7: S有限. 不可约 ⇒ 不变分布存在.

定理1.8.1 ⇒ $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} 1_{\{X_m = i\}} \to \frac{1}{\Gamma_i G_i}$

S有限 ⇒ $\sum_i \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} 1_{\{X_m = i\}}\right) \to \sum_i \frac{1}{\Gamma_i G_i}$

即 $\sum_i \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} 1_{\{X_m = i\}}\right) = 1 \Rightarrow \sum_i \frac{1}{\Gamma_i G_i} = 1$

⇒ 子 $i_0 \in S$, i_0 正常返 ⇒ 子不变分布.

· 引理1.8.19: P不可约、常返, 则:

$\mu_i = E_0 \sum_{n=1}^{G_0} 1_{\{X_n = i\}}$ 是 $\sum \mu_i P_{ir} = \mu_i$ 及 $\mu_0 = 1$ 的唯一解.

· 推论1.8.20: P不可约, 若子能归一化的不变测度,

则不变分布存.

若不常返, 若无为不变分布 ⇒ $\pi_i \equiv 0$ 矛盾 ⇒ 不变分布存

若常返, 由引理: 不变测度都不能归一化.

三. 遍历定理

不可约、正常返：$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} 1_{[X_m=j]} \xrightarrow{a.s.} \pi_j$

有界收敛：$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} P(X_m=j) \to \pi_j$

- 引理 1.8.8：分布列 $\pi, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots$，且 $\lim_{n\to\infty} \pi_i^{(n)} = \pi_i$，$\forall i \in S$（S 为可数）

  则 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} |\pi_i^{(n)} - \pi_i| = 0$　用分析知识易证.

- 命题 1.8.9：P 不可约，正常返，π 不变分布

  则：$\sum_{i\in S} \left|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} p_{ji}^{(m)} - \pi_i\right| \to 0$，$\sum_{i\in S} \left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| \xrightarrow{a.s.} 0$　用引理

- 定理 1.8.10（遍历定理）：P 不可约、正常返，π 不变分布，$\sum_i \pi_i |f(i)| < \infty$

  则 $P_\mu\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \sum_i \pi_i f(i)\right) = 1$

  时间平均以此　　空间平均

① f 有界：$\sum_i \left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| \xrightarrow{a.s.} 0$

由 $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \sum_{i\in S} f(i)\frac{V_i(n)}{n}$

$\Rightarrow \left|\sum_{i\in S} f(i)\left(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right)\right| \le \sup|f(i)| \cdot \sum_{i\in S}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| \xrightarrow{a.s.} 0$

② 一般的 f：不妨固定 $X_0 = j$.

轨道分解为一系列游式 (i.i.d)，$\exists s = \sum_{n=T_{s-1}}^{T_s-1} f(X_n)$，$\eta_s = \sum_{n=T_{s-1}}^{T_s-1} |f(X_n)|$

则 $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \frac{1}{n}(\exists_1 + \cdots + \exists_r + \sum_{m=T_r}^{n-1} f(X_m))$

$= \frac{r}{n}\cdot\frac{\exists_1+\cdots+\exists_r}{r} + \frac{1}{n}\sum_{m=T_r}^{n-1} f(X_m)$

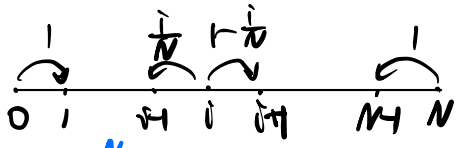
而 $\frac{\exists_1+\cdots+\exists_r}{r} \xrightarrow{a.s.} E\exists_i$，$\frac{r}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{E_i T_j}$，$\frac{E\exists_i}{E_i T_j} = \sum_{i\in S}\pi_i f(i)$

$\left|\frac{1}{n}\sum_{m=T_r}^{n-1} f(X_m)\right| \le \frac{\eta_{r+1}}{n} \le \frac{\eta_{r+1}}{r} \xrightarrow{a.s.} 0$

其中上式用到 $E\eta_{r+1} = \sum_{i\in S}|f(i)|\mu_i \propto \sum_{i\in S}|f(i)|\pi_i < \infty$

四. 应用

例 1.8.11 Ehrenfest 模型



$\pi_i = C_N^i \frac{1}{2^N}$, $E_i G_i = \frac{2^N}{C_N^i}$

$N=2M$ 时, $E_0 G_0 = 2^{2M}$, $E_M G_M = \frac{2^{2M}}{C_{2M}^M} \approx \sqrt{\pi M}$

例 1.8.13 距离为 $E_0 T_0 = \frac{508}{3}$

例 1.8.14 $\mathbb{T}^d$ 上 λ-biased R.W.

若 $|i|=|j|$, 则 $E_i G_i = E_j G_j$, $\pi_i = C_{|i|}$ (等价类)

$A = \{\delta : |\delta| \geq n\}$

$\Rightarrow$ $d^{n+1} C_{n+1} \cdot \frac{d}{\lambda+d} = d^n C_n \cdot \frac{\lambda}{\lambda+d}$

$\Rightarrow$ $C_n = \frac{1}{\lambda^n} C_0$, $R = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^n$, $C_0 = \frac{1}{R}$

$\lambda > d$: 正常返.

$\lambda = d$: 零常返 (由三前击中概率 / 格林函数和结论)

$\lambda < d$: 非常返

☆ 常返 / 非常返 : 用击中概率 / 格林函数.

正常返 / 零常返 : 用不变分布.

例 1.8.15 不可约. 正常返. $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} \xrightarrow{a.s.} \pi_i P_{ij}$

法一: $Y_n = (X_n, X_{n+1})$, $\tilde{S} = \{(i,j) : P_{ij} > 0\}$, $P_{(i,j)(j,k)} = P_{jk}$

$\Rightarrow$ $\tilde{\pi}_{(i,j)} = \pi_i P_{ij}$ 构造马氏链用遍历定理.

遍历定理: $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{Y_m=(i,j)\}} \xrightarrow{a.s.} \tilde{\pi}_{(i,j)} = \pi_i P_{ij}$

法二：$r=V_i(\tau)$. 对 LHS $=\frac{1}{r}\cdot r\frac{\sum_{s=0}^{n-1}1\{X_{T_s+t}=j\}}{n}$

$\frac{r}{n}\xrightarrow{a.s.}\frac{1}{E_iG_i}$，$\frac{1}{r}\sum_{s=0}^{n-1}1\{X_{T_s+t}=j\}\xrightarrow{a.s.}P_i(X_{T_s+t}=j\mid T_s<+\infty)=\pi_j$

故 LHS $\xrightarrow{a.s.}\pi_j\pi_j$

1.9 强遍历定理

一. 正常返，非周期

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}P(X_m=j)=\pi_i$

- 问：何时有 $P(X_m=j)\to\pi_i$ ？

必要条件：$P_{ij}^{(m)}>0$，n充分大

- 定义：若 $\exists N$，$\forall n>N$，$P_{ii}^{(n)}>0$，称i为非周期的

- 命题：P不可约，若$\exists$非周期态，则所有状态非周期。

且 $\forall i,j$，$\exists N_{ij}$，s.t. $P_{ij}^{(n)}>0$，$\forall n\geq N_{ij}$。 非周期是互通类的性质

i非周期，$\exists N_i$，$\forall m\geq N_i$，$P_{ii}^{(m)}>0$。

$\exists r,s$，$P_{ji}^{(s)}>0$，$P_{ij}^{(r)}>0$。

$\Rightarrow\forall n>N_i$，$P_{jj}^{(n+s+r)}\geq P_{ji}^{(s)}P_{ii}^{(n)}P_{ij}^{(r)}>0$

$\forall n>N_i+r$，$P_{jj}^{(n)}\geq P_{ji}^{(n-r)}P_{ij}^{(r)}>0$

$N_j=N_i+r+s$，$N_{ij}=N_i+r$

- 定理 1.3（强遍历定理）：P不可约，正常返，非周期

则：$\sum_j|P_\mu(X_n=j)-\pi_j|\to0$，从而 $P_{ij}^{(n)}\to\pi_j$，$\forall i,j$

注：耦合方法（coupling）

$\tilde{S}=S\times S$, $Z_n=(W_n,Y_n)$, W_n,Y_n 独立, $P_{(i,j)(k,l)}=P_{ik}P_{jl}$

初分布 ν 待定. $P_\nu(X_n=j)=P_\nu(W_n=j)$

Step 1: $\{Z_n\}$ 不可约 ✓ $\alpha_j=P_\nu(Y_n=j)$

Step 2: $\{Z_n\}$ 非周期 ✓

Step 3: $\{Z_n\}$ 正常返: $\tilde{\pi}_{(i,j)}=\alpha_i\cdot\alpha_j$ 为不变分布 ✓

Step 4: $\tau=\inf\{n\geq 0: W_n=Y_n\}=\tau_D$, 其中 $D=\{(i,i): i\in S\}$

正常返 $\Rightarrow \forall$ 给定 i, $P(\tau_{(i,i)}<\infty)=1$

而 $\tau\leq\tau_{(i,i)}\Rightarrow P(\tau<\infty)=1$ 即 W_n,Y_n 总会相遇.

Step 5: 下证: $P(W_n=j,\tau\leq n)=P(Y_n=j,\tau\leq n)$ W_n,Y_n 相遇后同分布.

$$\begin{aligned}LHS&=\sum_{m=0}^{n}\sum_{i\in S}P(W_n=j,\tau=m,Z_m=(i,i))\\&=\sum_{m=0}^{n}\sum_{i\in S}P(\tau=m,Z_m=(i,i))P_{(i,i)}(W_{n-m}=i)\\&=\sum_{m=0}^{n}\sum_{i\in S}P(\tau=m,Z_m=(i,i))P_{(i,i)}(Y_{n-m}=i)=RHS\ \checkmark\end{aligned}$$

Step 6: $\sum_j|P(W_n=j)-P(Y_n=j)|$

$$\leq\sum_j\left(P(W_n=j,\tau>n)+P(Y_n=j,\tau>n)\right)=2P(\tau>n)\to 0$$

取 $\nu=\mu\times\pi$ 即可.

例 1.9.4 Wright-fisher 模型: 一个人: $1\ \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}}\ 0$ 自环 $1-v$

N: 群体个数 X_n: 第 n 代中 1 的个数

$X_n=i$ 的条件下, $X_{n+1}\sim B(N,p_i)$, 其中 $p_i=(1-u)\frac{i}{N}+v\frac{N-i}{N}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}EX_n\triangleq a&=\sum_j j\alpha_j=\sum_j j\sum_i\alpha_i p_{ij}=\sum_i\alpha_i\sum_j jp_{ij}\\&=\sum_i\alpha_i\sum_j j\binom{N}{j}p_i^j(1-p_i)^{N-j}=\sum_i\alpha_i Np_i\\&=\sum_i\alpha_i\left((1-u)i+v(N-i)\right)=vN+(1-u-v)a\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a=\frac{vN}{u+v}$$

二. 正常返. 周期

· 定理 1.9.6 : P 不可约, 则 $\exists! d \in \mathbb{Z}_+$, 及 S 的一个分割 $D_0, \cdots, D_{d-1}$, s.t.:

$$(\text{其中 } D_{nd+r} = D_r,\ n \geq 1)$$

(1) $\forall r \geq 0$, $\forall i \in D_r$, $s \geq 0$, 有 $\sum_{j \in D_{r+s}} P_{ij}^{(s)} = 1$

若 $X_0 \in D_0$, 则 $X_1 \in D_1$, $X_2 \in D_2$, $\cdots$

(2) $\forall r \geq 0$, $i, j \in D_r$, $\exists N \geq 0$, s.t. $\forall n \geq N$, $P_{ij}^{(nd)} > 0$

$P^d|_{D_r}$ 是非周期的.

事实上, 令 $N = \{n \geq 0 : P_{00}^{(n)} > 0\}$, $d = \min\{m-n : m > n,\ m, n \in N\}$

取 $D_r = \{i \in S : \exists n \geq 0,\ P_{0i}^{(nd+r)} > 0\}$

· 命题: $d > 1$ 时, D_r 是 $\hat{P} = P^d$ 的等价类, 且为闭集.

且 D_r 上 $\hat{P}$ 不可约, 非周期.

注: 判断非周期的一般方法:

若 $P_{ii}^{(n)} > 0$ 且 $P_{ii}^{(m)} > 0$, $(n, m) = 1$, 则 i 为正常返态.

· 命题: 若 $X_0 = i$, $\delta_i = d$ 令, 且 P 正/零/非常返 $\Leftrightarrow$ $\hat{P}$ 正/零/非常返

· 命题: 记为 P 的不变测度, 则 $\pi(D_r) = t$, $d\pi|_{D_r}$ 是 $\hat{P}$ 在 D_r 上不变测度.

三. 零常返

· 命题 1.9.9 : P 不可约、零常返, 则 $P_{ij}^{(n)} \to 0\ (n \to \infty)$

不妨 P 非周期. 取定 i, j, $\varepsilon > 0$

零、非常返时成立

Claim 1: $\exists M$, s.t. $\forall n$, $P_{ij}^{(n)}, P_{ij}^{(n+1)}, \cdots, P_{ij}^{(n+M)}$ 中至少有一个 $< \varepsilon$.

充要P不可约 Claim 2: $\forall$给定的M, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $|P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n+m)}| < \varepsilon$, $\forall 1 \leq m \leq M$

对于 Claim 2: $Z_n = (W_n, Y_n)$, $r_{(i,j)(k,l)} = p_{ik} p_{jl}$, Z_n不可约

① Z_n非常返 $\Rightarrow$ $p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(n)} = r_{(i,j)(i,j)}^{(n)} \to 0$ ✓

② Z_n常返 $\Rightarrow$ 取 $\mu_k = 1_{\{k=j\}}$, $k \in S$

取$\{W_n\}$初分布为μ, $\{Y_n\}$初分布为μP^m

则 $|P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n+m)}| = |P_{\mu \times \mu P^m}(W_n = j) - P_{\mu \times \mu P^m}(Y_n = j)| \to 0$

(记得用强遍历定理)

对于 Claim 1: $\{X_n, \cdots, X_{n+m}\}$拆分成

$\{X_{n+m} = j\}$, $\{X_{n+m-1} = j, X_{n+m} \neq j\}$, $\cdots$, $\{X_n = j, X_{n+1}, \cdots X_{n+m} \neq j\}$

$\Rightarrow 1 \geq \sum_{l=0}^{M} P_{ij}^{(n+M-l)} P_j(\sigma_j > l)$

即 $G_i G_j = \sum_{l=0}^{+\infty} P_j(\sigma_j > l) = +\infty$

取M使$\sum_{l=0}^{M} P_j(\sigma_j > l) > \frac{1}{\varepsilon}$即可.

因此原题. 利用 Claim 1 和 2 易知命题成立.

· 总结:

① 正常返、非周期: $P_{ij}^{(n)} \to \pi_j$, $P_\mu(X_n = j) \to \pi_j$

② 正常返、周期: $P_{ij}^{(nd+s)} \to d\pi_j$, $P_{ij}^{(m)} \to 0$, $m \neq nd+s$,

$i \in D_r$, $j \in D_{r+s}$

③ 零常返: $P_{ij}^{(n)} \to 0$ 且 $\sum P_{ij}^{(n)} = +\infty$ ($= G_{ij}$)

④ 非常返: $P_{ij}^{(n)} \to 0$ 且 $\sum P_{ij}^{(n)} < +\infty$

1.10 收敛速度

- 定义：$d_{TV}(\mu,\nu)=\|\mu-\nu\|=\sup|\mu(A)-\nu(A)|=\frac{1}{2}\sum_i|\mu_i-\nu_i|\le 1$ 称为 全变差距离

  由强遍历定理：P不可约、非周期、正常返，$d_{TV}(\mu P^n,\pi)\to 0$

  易见：$\|\mu P-\nu P\|\le\|\mu-\nu\|$

- 命题1.10.1：Dobrushin 系数：S有限，$P_{ij}>0$ 永伸不强 $\forall i,j$.

  s.t. $\|\mu P-\nu P\|\le\alpha\|\mu-\nu\|$，特别地 $\|\mu P^n-\pi\|\le\alpha^n$，$\pi$为不变分布

  $\delta=\min_{i,j\in S}P_{ij}$，$N=|S|$，$0<\delta\le\frac{1}{N}$

  $\Rightarrow(\mu P)_j=\sum_{i\in S}\mu_iP_{ij}=\delta+\sum_{i\in S}\mu_i(P_{ij}-\delta)$

  $\Rightarrow\|\mu P-\nu P\|=\frac{1}{2}\sum_j|\sum_i\mu_iP_{ij}-\sum_i\nu_iP_{ij}|$

  $=\frac{1}{2}\sum_j|\sum_i\mu_i(P_{ij}-\delta)-\sum_i\nu_i(P_{ij}-\delta)|$

  $\le\frac{1}{2}\sum_j\sum_i|\mu_i-\nu_i|(P_{ij}-\delta)=\frac{1}{2}\sum_i|\mu_i-\nu_i|\sum_j(P_{ij}-\delta)$

  取 $\alpha=\sum_j(P_{ij}-\delta)=1-N\delta<1$ 即可

- 命题1.10.2：π为不变分布，$|S|<\infty$，不可约，非周期.

  则 $\exists C>0,\beta>0$，s.t. $\forall\mu$，$d_{TV}(\mu P^n,\pi)\le Ce^{-\beta n}$，$\forall n\ge 0$

  $\forall i,j\in S$，$\exists N_{ij}$，$n\ge N_{ij}$，$P_{ij}^{(n)}>0$.

  取 $m=\max_{i,j\in S}N_{ij}\Rightarrow P_{ij}^{(m)}>0$，$\forall i,j\in S$

  对 $n=rm+s$，$0\le s\le m-1$

  $\exists\,0\le\alpha<1$，$\|\mu P^{rm+s}-\pi\|=\|\mu P^{mr}\cdot P^s-\pi P^s\|$

  $\le\|\mu(P^m)^r-\pi\|\le\alpha^r<\alpha^{\frac{n}{m}-1}=Ce^{-\beta n}$

  其中 $C=\frac{1}{\alpha}$，$\beta=-\frac{\ln\alpha}{m}$.

1.11 分支过程 (Branching process)

Galton - Watson B.P. (1874):

X_n: 第 n 代的个体数.

$X_{n+1} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nX_n}$

其中 $\{\xi_{ni} : i = 1, 2, \cdots\}$ i.i.d 取值在非负整数.

第 n 代中第 i 个个体的后代个数.

子代分布: $P(\xi = k) = p_k$, $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. 0为吸收态.

- 定义: 灭绝时间: $T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$

  灭绝概率: $\rho = P_1(T_0 < \infty)$

- 命题: 除0外状态都是暂态. 从而, 若 $T_0 = +\infty$, 则 $X_n \to +\infty$

- 子代分布母函数: $f(s) = f_\xi(s) = E s^\xi = \sum p_k s^k$

  则: $\lim_{s \to 1^-} f'(s) = \sum p_k \cdot k = E\xi \triangleq m$

  $f''(s) = \sum p_k k(k-1) s^{k-2} \geq 0$

- 命题 1.11.1: $f_{X_n}(s) = f^{(n)}(s)$, $n \geq 1$.

  独立.

  $f_{X_{n+1}}(s) = E s^{X_{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) E(s^{\xi_1 + \cdots + \xi_k} | X_n = k)$

  $= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) \cdot f^k(s) = f_{X_n}(f(s))$

- 命题 1.11.2: $EX_n = m^n$. 进一步, 若 $m < 1$, 则 $\rho = 1$

归纳：$\mathbb{E}X_0 = 1 = m^0$

$$\mathbb{E}X_{n+1} = \mathbb{E}\sum_{j=1}^{X_n} \xi_j = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k)\, \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j \mid X_n = k\right)$$

（ξ_j 独立）

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k)\, km = m\,\mathbb{E}X_n$$

$$P(T_0 = \infty) \le P(T_0 > n) = P(X_n \ge 1) \le \mathbb{E}X_n = m^n \to 0$$

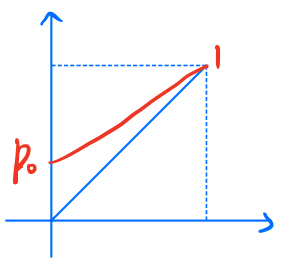
- 命题 1.11.3：若 $p_1 \neq 1$，则 $\rho = p_1(T_0 < \infty)$ 是 $s = f(s)$ 的最小非负解.

从而 $\rho < 1 \Leftrightarrow m > 1$.

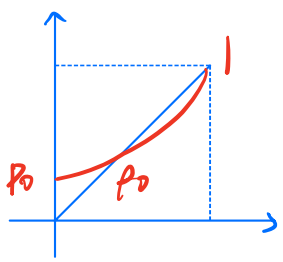
$$\rho = \sum_{k=0}^{\infty} P(T_0 < \infty, X_1 = k) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot \rho^k = f(\rho)$$

$f(0) = p_0$, $f(1) = 1$, $f'(s) \ge 0$, $f'(s) \ge 0$, $f'(1) = m$

$m \le 1$：

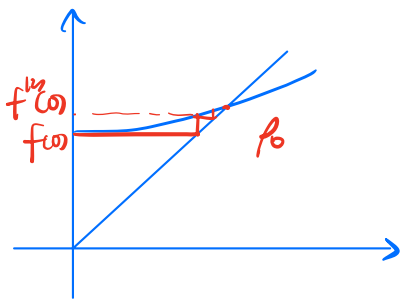


$m > 1$：



$$\rho = p_1(T_0 < \infty) = \lim_{n\to\infty} p_1(T_0 \le n) = \lim_{n\to\infty} p_1(X_n = 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_{X_n}(0) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = \rho_0$$



- 定义：次/下临界：$m < 1 \Leftrightarrow \rho = 1$

临界：$m = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$

超/上临界：$m > 1 \Leftrightarrow \rho < 1$